Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mardi 08 Janvier 2019
Module : Math 1- Tronc commun Sciences et Technologies
Durée : 1 h-30mns

Examen final

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

Exercice 01 : (04 points) Montrer que

$$\forall x > 0, Arctgx + Arctg\frac{1}{x} = c \text{ , tel que } c \text{ constante réelle}.$$

Déterminer la valeur de c.

Exercice 02 : (03 points)

1) Compléter :
$$\forall x \in \cdots, \cos(Arccos\, x) = \cdots$$
$$\forall x \in \cdots, Arccos\,(\ldots) = x$$
2) Montrer que : $\cos(2\alpha) = 2(\cos\alpha)^2 - 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3) En déduire la valeur : $\cos(2\,Arccos\,\frac{5}{6})$

Exercice 03 : (06 points) On considère l'application $f: [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

1. Montrer que f est continue sur$[-1, +\infty[$, dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. On désigne par $\tilde{f}$ l'application $\tilde{f}: [-1, +\infty[\to]0,1]$,
   définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1, +\infty[$. Montrer que $\tilde{f}$ est bijective.
4. Résoudre dans $[-1, +\infty[$ l'équation $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
5. On désigne par $\tilde{f}^{-1}$ la bijection réciproque de $\tilde{f}$. Justifier l'existence et déterminer $\left(\tilde{f}^{-1}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 04 : (04 points) Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence d'un réel a.

Exercice 05 : (03 points) Soit a et b deux réels. On définit la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \;\; si\; x < 0 \\ x^2 - a\; si\; 0 \leq x \leq 1 \\ b \ln x \;\; si\; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Bon courage

Corrigé

Exercice 01 : (04 pts)

Soit $x > 0$, on pose $f(x) = Arctgx + Arctg\frac{1}{x}$

f est continue et dérivable **(0.5 pt)**, en plus :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0, \forall x > 0\ (\mathbf{1.5pts})$$

Ce qui signifie que cette fonction est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. **(01 pt)**

Pour x=1, on a $f(1) = c\ (\mathbf{0.5pt}) \Leftrightarrow c = 2Arctg\ 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(\mathbf{0.5\ pt})$

D'où : $\forall x > 0, Arctgx + Arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 02 : (03 pts)

1)

$$\forall x \in [-1,1]\ (\mathbf{0.5\ pt}), \cos(Arccos\ x) = x\ (\mathbf{0.25\ pt})$$
$$\forall x \in [0,\pi]\ (\mathbf{0.5\ pt}), Arccos\ (\cos x) = x\ (\mathbf{0.25\ pt})$$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = (\cos\alpha)^2 - [1-(\cos\alpha)^2]$
   $D'o$ù: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos(2\alpha) = 2(\cos\alpha)^2 - 1$ **(0.5 pt)**
3) Pour $\alpha = Arccos\ \frac{5}{6}$ on a $\cos(2\ Arccos\ \frac{5}{6}) = 2(\cos(Arccos\ \frac{5}{6}))^2 - 1$
   Comme $\frac{5}{6} \in [-1,1], alors\ \cos(Arccos\ \frac{5}{6}) = \frac{5}{6}$ **(0.5 pt)**
   D'où: $\cos(2\ Arccos\ \frac{5}{6}) = \frac{7}{18}$ **(0.5 pt)**

Exercice 03 : (06 pts) Soit l'application $f: [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

1. La fonction est bien définie puisque $x^2+2x+2 > 0, \forall x \geq -1$
   La fonction f est la composée de :
   - la fonction polynômiale :$x \mapsto x^2+2x+2$; qui est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; en particulier sur $[-1,+\infty[$
   - Et de la fonction $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ qui est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

   Donc f est continue sur $[-1,+\infty[$ et dérivable sur $]-1,+\infty[$ **(0.5 pt)**
   $\forall x > -1, f'(x) = -\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}}$ **(01 pt)**
2. $\forall x > -1, f'(x) < 0$ ce qui signifie que la fonction est strictement décroissante.
   $$On\ a\ f(-1) = 1\ et\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

x	-1		+∞
$f'(x)$		$-$	
f	1	↘	0

(01.5 pt)

3. On a $\tilde{f}: [-1,+\infty[\rightarrow \tilde{f}([-1,+\infty[) =]0,1]$
   En plus c'est une fonction continue et strictement décroissante (d'après les questions précédentes), donc elle est bijective. **(01 pt)**
4. Soit $x \geq -1, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $ce\ qui\ implique\ x = 0\ ou\ x = -2$
   Comme $-2 \notin [-1,+\infty[$, l'équation admet la solution unique $x = 0$ **(0.5 pt)**
5. $\tilde{f}$ est bijective, comme $\tilde{f}'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2^3}} \neq 0$ la bijection réciproque est dérivable en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(0.5 pt)**
   On a $\frac{1}{\sqrt{2}} = \tilde{f}(0) \Leftrightarrow \tilde{f}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$
   Et

$$\left(\tilde{f}^{-1}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\tilde{f}'\left(\tilde{f}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

$$= \frac{1}{\tilde{f}'(0)}$$

$$= -\sqrt{2^3}\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

Exercice 04 : (04 pts) Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

- La relation $\mathcal{R}$ est réflexive car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x^2 = x - x\ ou\ encore\ \ x\mathcal{R}x$ **(01 pt)**
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$
$$\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$$
$$\Rightarrow y\mathcal{R}x$$

  $D'o$ù $\mathcal{R}$ est symétrique. **(01 pt)**
- Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y\ et\ y\mathcal{R}z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z$$
$$\Rightarrow x\mathcal{R}z$$

  La relation $\mathcal{R}$ est transitive. **(01 pt)**

  $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, donc c'est une relation d'équivalence.
- Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$cl(a) = \{x \in \mathbb{R}; x\mathcal{R}a\}\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

Or :

$$x\mathcal{R}a \Leftrightarrow x^2 - a^2 = x - a$$

$$\Rightarrow (x-a)(x+a) = x - a$$

$$\Rightarrow (x-a)(x+a-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = a \; ou \; x = 1 - a$$

D'où :

$$cl(a) = \{a, 1-a\} \; (\mathbf{0.5} \; \boldsymbol{pt})$$

Exercice 05 : (03 points) Soit a et b deux réels. On définit la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \;\; si \; x < 0 \\ x^2 - a \; si \; 0 \leq x \leq 1 \\ b \ln x \;\; si \; x > 1 \end{cases}$$

La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, il suffit d'étudier la dérivabilité en 0 et 1 **(0.5 pt)**

(pour qu'une fonction soit dérivable il faut qu'elle soit continue)

- Continuité et dérivabilité au point 0 :

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} (x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \;\;) = -1$$
$$g(0) = -a$$

Pour avoir la continuité en 0, il faut avoir a=1 **(0.5 pt)**

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \;\; - (-1)}{x}$$
$$= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \;\; = 0 \; (\mathbf{0.5} \; \boldsymbol{pt})$$

Et

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x}$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} x = 0 \; (\mathbf{0.5} \; \boldsymbol{pt})$$

Donc g est dérivable en 0, si a=1

- Continuité et dérivabilité au point 1 :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} b \ln x = 0 \; et \; g(1) = 1^2 - 1 = 0$$

Donc g est continue en 1 (si a=1) **(0.5 pt)**

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} (x + 1) = 2 \; (\mathbf{0.25} \; \boldsymbol{pt})$$
$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{b \ln x}{x - 1} = b \; (\mathbf{0.25} \; \boldsymbol{pt})$$

Pour avoir la dérivabilité en 1, il faut avoir b=2

Donc : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si a=1 et b=2