Corrigé de l'examen final MATH1. 2020/2021

Exercice 1: 08

1/ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \Rightarrow (xy - 2x - 2y + 4 \neq 0)$

La Contraposée :

1 $xy - 2x - 2y + 4 \Rightarrow x = 2$ ou $y = 2$

Raisonnement par Contraposée

on a : 0,5 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ et donc.

1 $xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 0.$

$\Rightarrow (x-2)(y-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ ou $y - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ ou $y = 2.$

2/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2).$

i/ 1 $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1(1+1)(1+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

1 $S_2 = \sum_{k=1}^{2} k(k+1)(k+2) = 1(2)(3) + 2(2+1)(2+2) = 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 + 24 = 30$

1 $S_3 = \sum_{k=1}^{3} k(k+1)(k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 6 + 30 + 60 = 96.$

ii/ Montrons par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

1ère etape: $n = 1$

1 $S_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

$S_1 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = 6.$

2ème etape Supposons que $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ et montrons que

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

1 On a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$

0,5 $S_{n+1} = \frac{1}{4}(n)(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3)$

$= (n+1)(n+2)(n+3)\left[\frac{1}{4}n + 1\right] = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad S_n = \sum k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}(n)(n+1)(n+2)(n+3).$

Exercice 2: 04

1 1°/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

2°/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f(x) = \frac{x - \sin x}{x}.$

1 i/ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*.$

ii/ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0 \left(\text{car } \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

1 Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (la limite existe et finie)

$\Rightarrow$ f est prolongeable par continuité en 0 et

1 Son prolongement est défini par : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice n° 3: 08

Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $g(x) = \ln[h(x) - x].$

1°/ Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a: $h(x) - x > 0$ ie. $\sqrt{x^2+1} > x.$

0,5 si $x \leq 0$ alors $\sqrt{x^2+1} > 0 \geq x$, i.e $\sqrt{x^2+1} > x.$

0,5 si $x > 0$ on a $\sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ toujours vrai.

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > x.$

2°/ $g(x) = \ln[h(x) - x] = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right).$

1 $D_g = \underbrace{\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2+1} - x > 0\}}_{0,5} = \underbrace{\mathbb{R}}_{0,5}$ d'après la premiere (1)

0,5 i/ On a $x \in D_f = \mathbb{R} \Rightarrow -x \in D_f = \mathbb{R}$.

ii/ $g(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - (-x)\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$

1,5 $g(-x) + g(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

$= \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right] = \ln\left(x^2+1-x^2\right) = \ln 1 = 0$

$g(-x) + g(x) = 0 \Rightarrow g(-x) = -g(x)$ et donc.

i/ et ii/ $\Rightarrow$ g est impaire.

4°/ 0,5 $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim \ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}\right]$

1,5 $= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = -\infty$

5°/ Soit $x \in \mathbb{R}$.

1 $g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = -\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1} - x}}{\sqrt{x^2+1}\,\cancel{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}}$

$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1 On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \Rightarrow$ g est strictement décroissante.