

Epreuve Finale (Maths2)
(L'usage de la calculatrice est interdit)
Choisir entre l'exercice 2 et l'exercice 4

Exercice 1:(6 pts) Considérons la fonction à deux variables réelles indépendantes

x, y définie par $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition de f dans le plan xOy .
2. Calculer les dérivées partielles de $f(x, y)$.
3. Calculer l'intégrale

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3}$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3, y \geq 2 \text{ et } x + y \leq 5\}$

Exercice 2:(6pts)

1. Soit A, B et C trois matrices carrées d'ordre n . Montrer que si C est inversible alors

$$A.C = B.C \implies A = B.$$

2. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, écrire le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de la matrice M . Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(\lambda) = 0$.
- (b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de M telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Montrer que

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont les vecteurs propres de la matrice M de valeurs propres respectives λ_1, λ_2 et λ_3 .

- (c) Montrer que les vecteurs $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ sont linéairement indépendants. Que peut-on en conclure?

Exercice 3:(4pts) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}
- (b) Résoudre le système (S) : $\begin{cases} -2x + 2y = 1 \\ -x + 4y = -6 \end{cases}$

Exercice 4:(6pts) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - aI_3)$.
- (b) Déterminer les valeurs de a telles que $\det(A - aI_3) = 0$.
- (c) Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{R}$$

- (d) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles P est inversible.
- (e) Pour $\alpha = 0$, déterminer la matrice inverse de P (P^{-1}).

Bon courage

Nom:

Prénom:

Matricule:

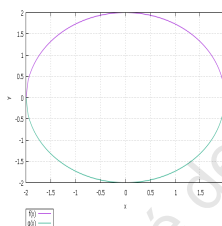
QCM:(6pts) Cocher la bonne réponse. Si vous cochez **Autre** donner la bonne réponse.

Questions	Réponses
1. Soit l'équation différentielle d'ordre 1 suivante $\frac{x}{2}y - y' = \sqrt{y}$. Il s'agit d'une équation de.	☐ Linéaire ☐ Ricatti ☐ Homogène ☐ Autre
2. Le produit d'une matrice A de type (n, m) avec la matrice B de type (m, q) est une matrice de type. (où $n, m, q \in \mathbb{N}^*$)	☐ (m, q) ☐ (n, q) ☐ (q, n) ☐ Autre
3. L'élément neutre pour la multiplication des matrices carrées d'ordre 4 est.	☐ I_2 ☐ I_1 ☐ 1 ☐ Autre
4. Soit la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. La somme $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ est appelée.	☐ Trace de A ☐ Transposée de A ☐ Diagonale principale de A ☐ Autre
5. Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n . On a $A.B = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$.	☐ Vraie ☐ Faux
6. Soit A, B et C trois matrices carrées d'ordre n . On a $A.C = B.C \implies A = B$.	☐ Vraie ☐ Faux

Corrigé de l'Epreuve Finale (Maths2)

Exercice 1: (6 pts)

1. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$. (0.5)
 D_f est la partie intérieure du cercle de centre $\mathbf{O}(0, 0)$ et de rayon $R = 2$ (0.25)
 (Disque et sa circonférence)



(0.5)

Figure 1: Domaine de définition de f

2. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ (01), $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ (01)
3. $\int \int_D \frac{dx dy}{(x+y)^3} \stackrel{(0.5)}{=} \int_1^3 dx \int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3} \stackrel{((0.5))}{=} \int_1^3 dx \int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3} \stackrel{(0.5)}{=}$
 $\int_1^3 dx \left[-\frac{1}{2}(x+y)^{-2} \right]_2^{5-x} \stackrel{(0.25)}{=} -\frac{1}{2} \int_1^3 dx \left[\frac{1}{25} - (x+2)^{-2} \right] \stackrel{(0.5)}{=} -\frac{1}{2} \left[\frac{x}{25} + \frac{1}{x+2} \right]_1^3 =$
 $\frac{2}{75}$. (0.25)

Exercice 2: (6pts)

1. $A.C = B.C \stackrel{C \text{ inversible (0.5)}}{\implies} (A.C).C^{-1} = (B.C).C^{-1} \stackrel{\text{Le produit des matrices est associatif (0.25)}}{\implies}$
 $A.C.C^{-1} = B.C.C^{-1} \stackrel{(0.5)}{\implies} A.I_n = B.I_n \stackrel{(0.25)}{\implies} A = B$.
2. (a) $P(\lambda) \stackrel{(0.25)}{=} \det(M - \lambda I_3) \stackrel{(0.25)}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -\lambda-1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$
 $(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -\lambda-1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-2).$
 Ainsi $P(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-2)$. (0.25)
 $P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ (0.25) ou } \lambda = -1 \text{ (0.25) ou } \lambda = 2 \text{ (0.25)}.$

(b) Soit $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ Montrons que $M.V_1 = -V_1$ (0.25), $M.V_2 = V_1$ (0.25), $M.V_3 = 2V_3$ (0.25).

(c) V_1, V_2, V_3 linéairement indépendants ssi pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1.V_1 + \alpha_2.V_2 + \alpha_3.V_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (0.25).

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (0.25) \text{ On}$$

$$\text{résoud le système(0.75)} \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \alpha_1 =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0. \text{ Par conséquent les vecteurs } V_1, V_2, V_3 \text{ sont linéairement indépendants(0.25).}$$

Conclusion:(0.75) M est diagonalisable.(Une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ existe telle que $D = P^{-1}MP$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ inversible .

Exercice 3:(4pts) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. A est inversible $\iff |A| \neq 0$ (0.5), $|A| = -6 \neq 0$ (0.5).

Calcul de A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} t(ComA)$ (0.25)

$$Com A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} (01) \implies t(ComA) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} (0.25),$$

$$\text{d'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} (0.5).$$

$$2. (S) \xrightarrow{(0.25)} A.X = B \xrightarrow{(0.5)} X = A^{-1}.B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -13/6 \end{pmatrix}. (0.25)$$

Exercice 4:(6pts) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1. \det(A - aI_3) \stackrel{(0.25)}{=} \begin{vmatrix} -a & 1 & 0 \\ 2 & -1-a & -2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = a(1-a^2) (0.25).$$

$$2. \det(A - aI_3) = 0 \iff a = 0 (0.25) \text{ ou } a = 1 (0.25) \text{ ou } a = -1 (0.25).$$

$$3. P \text{ inversible } \iff \det P \neq 0. (0.25)$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha^2 - 1) (0.5).$$

4. $\det(P) \neq 0 \iff \alpha \neq 1(\mathbf{0.25})$ et $\alpha \neq -1(\mathbf{0.25})$.

5. Pour $\alpha = 0$, $\det(P) \neq 0$, $(\mathbf{0.25})$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|P| = -1(\mathbf{0.25})$ donc P^{-1} existe et on a $P^{-1} = \frac{1}{|P|}t(ComP)(\mathbf{0.25})$

$$Com(P) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

$P_{11} = -1(\mathbf{0.25})$, $P_{12} = -1(\mathbf{0.25})$, $P_{13} = 1(\mathbf{0.25})$, $P_{21} = 0(\mathbf{0.25})$, $P_{22} = 1(\mathbf{0.25})$, $P_{23} = -1(\mathbf{0.25})$, $P_{31} = 1(\mathbf{0.25})$, $P_{32} = 1(\mathbf{0.25})$, $P_{33} = -2(\mathbf{0.25})$.

Ainsi $Com(P) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} (\mathbf{0.25})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} (\mathbf{0.25})$

Nom:

Prénom:

Matricule:

QCM:(6pts) (01 point pour chaque bonne réponse)

Questions	Réponses
1. Soit l'équation différentielle d'ordre 1 suivante $\frac{x}{2}y - y' = \sqrt{y}$. Il s'agit d'une équation de Bernoulli $y' = \frac{x}{2}y - y^{\frac{1}{2}}$	☐ Linéaire ☐ Ricatti ☐ Homogène ☒ Autre
2. Le produit d'une matrice A de type (n, m) avec la matrice B de type (m, q) est une matrice de type. (où $n, m, q \in \mathbb{N}^*$)	☐ (m, q) ☒ (n, q) ☐ (q, n) ☐ Autre
3. L'élément neutre pour la multiplication des matrices carrées d'ordre 4 est. I_4	☐ I_2 ☐ I_1 ☐ 1 ☒ Autre
4. Soit la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. La somme $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ est appelée.	☒ Trace de A ☐ Transposée de A ☐ Diagonale principale de A ☐ Autre
5. Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n . On a $A.B = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$.	☐ Vraie ☒ Faux
6. Soit A, B et C trois matrices carrées d'ordre n . On a $A.C = B.C \implies A = B$.	☐ Vraie ☒ Faux