Université de TLEMCEN ST 2016-2017

Chapitre02: Les Nombres complexes. correction

Exercice 01: 1) Mettre sous forme algébrique $(a+ib)$ les nombres complexes suivants:

$$\frac{3+i\sqrt{3}}{-1+2i}, \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}, \left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

2) Déterminer le module et un argument des nombres complexes:

$$a) 1+i\sqrt{3}, \left(-1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6, e^{i\theta}+e^{2i\theta}\ pour \theta \in \mathbb{R}.$$

Preuve: **1)**

$$\frac{3+i\sqrt{3}}{-1+2i} = \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)}{-1+2i}\cdot\frac{(1+2i)}{1+2i} = \frac{3-2\sqrt{3}}{5} + \frac{\left(6+\sqrt{3}\right)i}{5}$$

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 \cdot (1+i)^2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^7 \cdot (1+i)^2 = \left(\frac{2i}{2}\right)^7 .2i = i^7 \cdot 2i = 2$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= -\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 \\ &= -\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = -e^{-i\pi} = -\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right) = 1.\end{aligned}$$

2)1) $z_1 = 1+i\ \sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow |z_1| = 2$ et $\arg z_1 = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

2) $z_2 = \left(-1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right]^6 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6\left(e^{i5\pi}\right)$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6\left(e^{i4\pi}\right).\left(e^{i\pi}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6.\left(e^{i\pi}\right)$

$\Rightarrow |z_2| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6$ et $\arg z_2 = \pi\,[2\pi]$.

3) on a:

$$\begin{aligned} & z = e^{i\theta}+e^{2i\theta} = e^{i\frac{3}{2}\theta}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ = & \ 2e^{i\frac{3}{2}\theta}\left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}}{2}\right) = 2e^{i\frac{3}{2}\theta}\cos\frac{\theta}{2} \\ = & \left[2\cos\frac{\theta}{2}\right]e^{i\frac{3}{2}\theta}. Il faut que le module est toujours positif. \end{aligned}$$

1er cas: Si $\cos\frac{\theta}{2} > 0 \Rightarrow |z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg z = \frac{3}{2}\theta\,[2\pi]$.
2ème cas: Si $\cos\frac{\theta}{2} < 0 \Rightarrow |z| = -2\cos\theta$ et $\arg z = \left(\frac{3}{2}\theta + \pi\right)[2\pi]$
car: $\left[\cos\frac{\theta}{2}\right] \cdot e^{i\frac{3}{2}\theta} = \left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right] \cdot \left(-\cos\frac{3}{2}\theta - i\sin\frac{3}{2}\theta\right)$
$= \left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right] \cdot \left(\cos\left(\pi + \frac{3}{2}\theta\right) + i\sin\left(\pi + \frac{3}{2}\theta\right)\right) == \left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right] e^{i\left(\pi + \frac{3}{2}\theta\right)}$.
3ème cas: Si $\cos\frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow |z| = 0$ et $\arg z$ n'existe pas.

Exercice 02: Calculer le rapport

$$\frac{z}{w} avec z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} et w = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}} etendduire : \cos\frac{\pi}{12} et \sin\frac{\pi}{12}.$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right) \\
&= \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)\right] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}. \\
w &= \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad (2)$$

par identification de (1) et (2)

$$\cos\frac{\pi}{12} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) et \sin\frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Exercice 03: Représenter sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

$$1+i, \left(1+i\sqrt{3}\right)^6, \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} et 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Preuve:

$$1)\ 1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$2)\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}=2^{6}.\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6}=2^{6}.\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{6}=2^{6}.e^{i2\pi}.$$

$$3)\ \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$4) ona :e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta ete^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow &\quad 1+\cos\alpha+i\sin\alpha=1+e^{i\alpha}=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)=2e^{i\frac{\alpha}{2}}\frac{\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)}{2}\\ = &\quad 2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\right]\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

1er cas: Si $\cos\frac{\alpha}{2}>0\Rightarrow|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\arg z=\frac{\alpha}{2}\,[2\pi]$.
2ème cas: Si $\cos\frac{\alpha}{2}<0\Rightarrow|z|=-2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\arg z=\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)[2\pi]$
car: $\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\right]\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}=\left[-2\cos\frac{\alpha}{2}\right]\cdot\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.
$=\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]\cdot\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)==\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]e^{i\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$.
3ème cas: Si $\cos\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow|z|=0$ et $\arg z$ n'existe pas.

Exercice 04: **a)** Déterminer les racines cubiques de:

$$\mathbf{z}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$$

b) Calculer les racines carrées du nombre complexe:

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

En déduire l'écriture algébrique du nombre complexe $\alpha=3e^{-\frac{\pi}{8}i}$.

Preuve: **a)**Les racines cubiques de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$?

- Les racines cubiques de l'unité est: $u_k=e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $k=0,1,2.$
- Une racine cubique de $Z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est $Z_0=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=e^{i2\pi}=1$
- D'où les racines cubiques de Z_2 sont:

$$Z_k=u_k.Z_0=1.e^{i\frac{2k\pi}{3}}=e^{i\frac{2k\pi}{3}}aveck=0,1,2.$$

b)$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2+y^2=1 \\ 2xy=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $y^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

et $z_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

2ème méthode: écriture trigonométrique **.**

En déduire l'écriture algébrique du nombre complexe α de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

On a:

$$\left(e^{\frac{i\pi}{8}}\right)^2=e^{\frac{i\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=z$$

c'est à dire: $e^{\frac{i\pi}{8}}$ est une racine carrée de $e^{\frac{i\pi}{4}}$, mais $e^{\frac{i\pi}{8}}=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$, avec:

$\cos\frac{\pi}{8}>0$ et $\sin\frac{\pi}{8}>0 \Rightarrow e^{\frac{i\pi}{8}}=z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow e^{\frac{-i\pi}{8}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \alpha=3e^{\frac{-i\pi}{8}}=3\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+3i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$.

Exercice 05: Calculer $\cos\frac{\pi}{4}$.

1) En utilisant l'équation $z^4+1=0$.

2) En calculant par la formule de Moivre l'expression de $\cos 4\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$ et en vérifiant que l'équation obtenue admet des racines multiples. Cette particularité pouvait-elle prévue?

Preuve: 1) On a $z^4+1=\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)$

On pose: $z=e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow z^4+1=0 \Rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}}$ est l'un des racines de l'équation: $z^4+1=0$.

Après des calculs des $\triangle$

$z^4+1=\left(z-\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z-\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z-\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z-\left(\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\left(e^{i\alpha}\right)^4=(\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4$

$=\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha\,(i\sin\alpha)+6\cos^2\alpha\,(i\sin\alpha)^2+4\cos\alpha\,(i\sin\alpha)^3+(i\sin\alpha)^4$

$\Rightarrow \cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)+\left(1-\cos^2\alpha\right)^2$

$\Rightarrow \cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$.

Alors pour $\alpha=\frac{\pi}{4}$ on trouve que $\cos\frac{\pi}{4}$ vérifie l'équation:

$$\begin{aligned} 8x^4-8x^2+2 &= 0 \Leftrightarrow 4x^4-4x^2+1=0 \\ &\Leftrightarrow \left(2x^2-1\right)^2=0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ car il est positif.

Exercice 06: Résoudre dans $\mathbb{C}$; $\left(z^2+4z+1\right)^2+(3z+5)^2=0$

Preuve: On a: $\left(a^2+b^2\right)=(a+ib)(a-ib)$

$\left(z^2+4z+1\right)^2+(3z+5)^2=0$
$\Leftrightarrow \left(z^2+4z+1+i(3z+5)\right)\left(z^2+4z+1-i(3z+5)\right)=0$
$\Rightarrow \begin{cases} z^2+4z+1+i(3z+5)=0 \Rightarrow z^2+(4+3i)z+1+i5=0...(1) \\ z^2+4z+1-i(3z+5)=0 \Rightarrow z^2+(4-3i)z+1-i5=0...(2) \end{cases}$
Pour (1) on a: $\triangle=3+4i$ d'où les racine carrées sont: $\triangle_1$ et $\triangle_2$
de plus si: $(x+iy)^2=\triangle \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases} \Rightarrow \triangle_1=2+i$ et $\triangle_2=-2-i$
Alors les deux racines sont: $z_1=\frac{1}{2}\left[-(4+3i)-(2+i)\right]=-3-2i$ et $z_2=-1-i$.
Pour (2) on a: $\triangle=3-4i$ d'où les racine carrées sont: $\triangle_1$ et $\triangle_2$
de plus si: $(x+iy)^2=\triangle \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ 2xy=-4 \end{cases} \Rightarrow \triangle_1=2-i$ et $\triangle_2=-2+i$
Alors les deux racines sont: $z_3=\frac{1}{2}\left[-(4-3i)-(2-i)\right]=-3+2i$ et $z_4=-1+i$.
qui sont les deux conjugués des deux premiers.
Conclusion: l'ensemble des solutions est: $\Gamma=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$..

2) $z^4+(5-2i)z^2+5-5i=0$.

On pose: $z^2=Z$ D'où l'équation:

$$Z^2+(5-2i)Z+5-5i=0$$

$\triangle=9 \Rightarrow Z_1=\frac{(2i-5)-3}{2}=i-4$ ou $Z_2=i-1$
Il suffit de calculer les deux racines carrées de Z_1 et les deux racines carrées Z_2
Alors l'ensemble des solutions sont les 4 racines carrées.
Pour $z^2=Z_{\,1} \Leftrightarrow (x+iy)^2=i-4$
$\begin{cases} x^2-y^2=-4 \\ x^2+y^2=\sqrt{17} \\ 2xy=1 \end{cases}$
$\Rightarrow x^2=\frac{\sqrt{17}}{2}-2$ et $y^2=\frac{\sqrt{17}}{2}+2 \Rightarrow z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{17}}{2}-2}+i\sqrt{\frac{\sqrt{17}}{2}+2}$
et $z_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{17}}{2}-2}-i\sqrt{\frac{\sqrt{17}}{2}+2}$ car: x et y ont le même signe.
Autre méthode pour le calcul des racines carrées de $Z_{\,2}$
* $Z_{\,2}=-1+i=\sqrt{2}\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}$
*Une racine carrée de $Z_{\,2}$ est: $2^{\frac{1}{4}}e^{i3\frac{\pi}{8}}$
*Les racines carrées de l'unité sont: $e^{\frac{i2k\pi}{2}}=e^{ik\pi}$; $k=0,1$
Alors les deux racines carrées sont: $z_3=2^{\frac{1}{4}}e^{i3\frac{\pi}{8}}$ et $z_4=-2^{\frac{1}{4}}e^{i3\frac{\pi}{8}}$
$S=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$. **bon courage.**