Université de TLEMCEN
Département de PHYSIQUE TD n°1 MATH 1 1ère année ST-2016-2017
Logique élémentaire- Les raisonnements-Théorie des ensembles.(Solutions)

Exercice 00:

1) Déterminer les solutions de l'équation suivante en utilisant les deux discriminants $\triangle$ et $\triangle'$:

$$3x^{\,2} - 2x - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} 1)\ \triangle &= (-2)^2 - 4.3.(-7) = 88 \\ x_1 &= \frac{2-\sqrt{88}}{2(3)} = \frac{2-2\sqrt{22}}{6} = \frac{1-\sqrt{22}}{3}, x_2 = \frac{1+\sqrt{22}}{3}. \\ 2)\ \triangle' &= (-1)^2 - .3.(-7) = 22 \\ x_1 &= \frac{1-\sqrt{22}}{3}, x_2 = \frac{1+\sqrt{22}}{3}. \end{aligned}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante:

$$9x^{\,2} - 6x + 1 \geq 0$$

$$\triangle' = (-3)^2 - .9.(1) = 0.$$

Alors le signe du polynôme est le signe de $a = 9 > 0$, alors l'ensemble des solutions est : $\mathbb{R}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$|5x-4| = x+3; \quad |7x+4| = |x-2|.$$

Pour résoudre une équation de type: $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$ mais il faut que $b \geq 0$.

$$\begin{aligned} |5x-4| &= x+3 \Leftrightarrow [5x-4 = x+3] \text{ ou } [5x-4 = -x-3] \text{ avec } x+3 \geq 0 \\ &\Rightarrow \left[x = \frac{7}{4}\right] \text{ ou } \left[x = \frac{1}{6}\right] \text{ avec } x \geq -3 \\ &\Rightarrow S = \left\{\frac{7}{4}, \frac{1}{6}\right\}. \end{aligned}$$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante:

$$\sqrt{x^{\,2} - 6x + 5} \geq x - 2.$$

Pour résoudre une inégalité de type: $\sqrt{a} \geq b$ il faut que $a \geq 0$

D'autre part si $b < 0$ alors l'inégalité est vérifie sous la condition $a \geq 0$.
Mais si $b \geq 0$ on a $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq b^2$.

Dans l'exemple il faut que: $x^{\ 2}-6x+5\geq 0, \triangle =16, x_1=1, x_2=5$. Alors il faut que l'ensemble des solutions est inclu dans: $\left]-\infty,1\right]\cup\left[5,+\infty\right[$.

$$\sqrt{x^{\ 2}-6x+5}\geq x-2.$$

1) Si $x-2<0\Rightarrow x<2\Rightarrow D_1=\left]-\infty,1\right]$ d'après le domain de définition de la racine.
2) Si $x-2\geq 0\Rightarrow\sqrt{x^{\ 2}-6x+5}\geq x-2\Leftrightarrow x^{\ 2}-6x+5\geq(x-2)^2\Leftrightarrow x^2-6x+5\geq x^2-4x+4$
$\Leftrightarrow 2x\leq 1\Rightarrow x\leq\frac{1}{2}\Rightarrow D_2=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$.
Conclusion: $D=D_1\cup D_2=\left]-\infty,1\right]$.

Exercice 01: Soient P, Q et R trois propositions, dresser la table de vérité de la proposition suivante:

$$(A):((P\wedge Q)\vee R)\Leftrightarrow\left(\bar{R}\Rightarrow P\right)$$

Cette proposition est-elle une tautologie?

P	Q	R	$\bar{R}$	$P\wedge Q$	$\bar{R}\Rightarrow P$	$(P\wedge Q)\vee R$	(A)
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1

Donc (A) n'est plus une tautologie.

Exercice 02: Soient p, q et r trois propositions.

1) Dresser la table de vérité de la proposition: $(p\wedge q)\wedge(p\Rightarrow\bar{q})$.

p	q	$\bar{q}$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow\bar{q}$	$(p\wedge q)\wedge(p\Rightarrow\bar{q})$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

ce qui donne que la proposition est toujours fausse.

2) En déduire, sans établir de table de vérité, la valeur de vérité de la proposition:

$$[(p\wedge q)\wedge(p\Rightarrow\bar{q})]\Rightarrow[((r\quad\Rightarrow q)\vee(p\Leftrightarrow r))\wedge(p\vee\bar{r})].$$

La proposition est vraie car le premier membre de l'implication est faux d'après la 1ère question et l'implication est fausse dans un seul cas si le premier membre est vrai et le second membre est faux.

3) Sans l'utilisation de table de vérité montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

a) $\left[\bar{R} \Rightarrow \bar{Q}\right] \vee \left[R \Rightarrow \bar{Q}\right]$.

b) $\left(R \vee \bar{R}\right) \vee \bar{Q}$.

1) on calcul la négation de a

$$\begin{aligned}
\bar{a} &\Leftrightarrow \overline{\left[\bar{R} \Rightarrow \bar{Q}\right] \vee \left[R \Rightarrow \bar{Q}\right]} \\
&\Leftrightarrow \overline{\left[\bar{R} \Rightarrow \bar{Q}\right]} \quad \wedge \quad \overline{\left[R \Rightarrow \bar{Q}\right]} \\
&\Leftrightarrow \left[\bar{R} \wedge \bar{\bar{Q}}\right] \wedge \left[R \wedge \bar{\bar{Q}}\right] \\
&\Longleftrightarrow \left[\bar{R} \wedge Q\right] \wedge \left[R \wedge Q\right] \\
&\Longleftrightarrow \left(\bar{R} \wedge R\right) \wedge Q \quad \text{d'après le principe de distributivité.}
\end{aligned}$$

2) On calcul la double négation de a

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{a}} &\Leftrightarrow \overline{\left(\bar{R} \wedge R\right) \wedge Q} \\
&\Leftrightarrow \overline{\left(\bar{R} \wedge R\right)} \ \vee \ \overline{Q} \\
&\Leftrightarrow \left(\bar{\bar{R}} \vee \bar{R}\right) \vee \overline{Q} \\
&\Leftrightarrow \left(R \vee \bar{R}\right) \vee \bar{Q} \quad (\text{ç-à-d } b) \ )
\end{aligned}$$

Conclusion:

$\bar{\bar{a}} \Leftrightarrow b)$ et on a toujours $\bar{\bar{a}} \Leftrightarrow a$ donc $a) \Leftrightarrow b)$.

Exercice 03: 1) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses? Justifier.

a) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > m+1$ b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$ c) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n < m$
d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$ e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x-2$. f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.
g) $\left[\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{N}, yx > 1\right]$ h) trouver l'intervalle le plus grand tel que:
$\exists x \in I \sqsubset \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 - 3y + 1 > x - 3$.
i) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}^*, (x-y)(x+y) = y^2$.
2) Déterminer les négations de chacune des propositions citées en 1).
Solution:
a) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > m+1$ (n dépend de m) est vraie car il suffit de prendre $n = m+2$ de plus la négation est: $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq m+1$.
b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$ est vraie car il suffit de prendre $n = 0$.
de plus la négation est: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n > m$.
c) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n < m$ est fausse car pour $m = 0$ le n n'existe pas.
de plus la négation est: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m$
d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$ est fasse car il suffit de prendre $y = -x-2$
de plus la négation est: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$.
e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x-2$ est fausse car il suffit de prendre $x = y$
de plus la négation est: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \neq x-2$.

f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$ est vraie car il suffit de prendre $x = -2$
de plus la négation est: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$
g) $\left[\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{N}, yx > 1\right]$ est vraie car $yx > 1 \Rightarrow y > \frac{1}{x}$alors il suffit de prendre $y = \left[\frac{1}{x}\right] + 1$
de plus la négation est: $\left[\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{N}, yx \leq 1\right]$.
h) trouver l'intervalle le plus grand tel que:
$\exists x \in I \sqsubset \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 - 3y + 1 > x - 3$. est vraie car
$y^2 - 3y + 1 > x - 3 \Rightarrow y^2 - 3y + 4 - x > 0$
$\triangle = 9 - 4(4 - x) = 4x - 7$
il suffit de prendre $x \leq \frac{7}{4}$ pour que $\triangle \leq 0$ car le polynôme ne change pas le signe.
$I = \left]-\infty, \frac{7}{4}\right]$
de plus la négation est: $\forall x \in I \sqsubset \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 - 3y + 1 \leq x - 3$.
i) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}^*, (x - y)(x + y) = y^2$est fausse car on trouve: $x^2 = 2y^2$
$\Rightarrow x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \sqrt{2}y\right)\left(x + \sqrt{2}y\right) = 0$
$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ ou $-\sqrt{2} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ contradiction.
de plus la négation est: $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}^*, (x - y)(x + y) \neq y^2$.

Exercice 04: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que:

1) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.
2) a et p sont deux entiers naturels; montrer que l'on a :

$$(\ p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2\ ) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

3) $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel pour tout $n \geq 2$ premier. Déduire que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.
4) Montrer que: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.
5) Montrer que si $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$:

$\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ et $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q} \left(\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10}\right)$.
Preuve:

1) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

   Supposons que n n'est pas premier$\Rightarrow$ $\exists a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$ tel que: $n = a \cdot b$, $(a, b) \neq (n, 1)$ et $(a, b) \neq (1, n)$.
   Alors $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = [(2^a) - 1][P(2^a)]$ avec $\deg P(2^a) = b - 1$.

car: $(X)^b - 1 = [(X) - 1][P\ (X)]$ avec $\deg P\ (X) = b - 1$.
Mais $[(2^a) - 1] \neq 2^n - 1$ et $[(2^a) - 1] \neq 1$
$\Rightarrow 2^n - 1 = M \cdot [P\ (2^a)]$ avec $M \neq 2^n - 1$ et $M \neq 1 \Rightarrow 2^n - 1$ n'est pas premier (contradiction avec l'hypothèse).

2) a et p sont deux entiers naturels; montrer que l'on a :

$$(\ p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2\ ) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

Si p premier et p divise $a^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $a^2 = k \cdot p \Rightarrow a \cdot a = k \cdot p$ puisque p n'est pas décomposable car il est premier alors on trouve le p dans la décomposition de $a.a$ en particulier dans la décomposition de $a \Rightarrow p$ divise a.

3) si n est premier alors $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que: $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$ avec $b \neq 0$ et $\sqrt{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow n = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow n \cdot b^2 = a^2$

$\Rightarrow n$ divise a^2 mais n premier$\Rightarrow n$ divise $a \Rightarrow a = k \cdot n$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 = n \cdot k^2 \Rightarrow n$ divise b^2, mais n premier$\Rightarrow n$ divise b

$\Rightarrow n \neq 1$ est un diviseur commun de a et b contradiction avec $(a,b) = 1 \Rightarrow \sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.

D'après (4) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$
la somme des deux nombres$\Rightarrow 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ contradiction$\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

4) Montrer que: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Par l'absurde si $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} = \alpha - \sqrt{6} \Rightarrow \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\alpha - \sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = \alpha^2 + 6 - 2\sqrt{6}$
$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{\alpha^2+1}{4} \in \mathbb{Q}$ contradiction car dans le cas général si n n'est pas le carré d'un entier alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ c'est le cas pour $\sqrt{6}$.
Car si $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) = 1 \Rightarrow 6.q^2 = p^2 \Rightarrow q = 1$ car dans la décomposition de p^2 on a pas q car: $(p,q) = 1$
d'où la contradiction car $6 \neq p^2$.

5) Montrer que si $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$:

$\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ et $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q} \left(\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10}\right)$.
(1) Montrons que: $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
Par l'absurde on suppose que: $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} = \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \alpha - \sqrt{5} \Rightarrow 2 = \left(\alpha - \sqrt{5}\right)^3$
$\Rightarrow 2 = \alpha^3 - 3\sqrt{5}\alpha^2 + 15\alpha - 5\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{15\alpha+\alpha^3-2}{3\alpha^2+5} \in \mathbb{Q}$ d'où la contradiction.
(2) Montrons que: $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q} \left(\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10}\right)$.
Par l'absurde on suppose que: $\log_{10} 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 10} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $(p \wedge q = 1)$
$\Rightarrow q \log 2 = p \log 10 \Rightarrow \log 2^q = \log 10^p \Rightarrow 2^q = 10^p = 2^p \times 5^p$
$\Rightarrow$ (pair$\rightarrow 2^{q-p} = 5^p \rightarrow$impair) d'où la contradiction.

Exercice 05: Montrer par récurrence que:

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de $9.(R_n)$

Preuve: Si $n = 0$, $4^0 - 6 \cdot 0 - 1 = 0 = 0.9 \Rightarrow 4^0 - 6 \cdot 0 - 1$ est un multiple de $9 \Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$4^{(n+1)} + 6\,(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

En effet:

$$\begin{array}{rcl}
4^{(n+1)} + 6\,(n+1) - 1 & = & 4 \cdot 4^n + 6n + -1 + 6 \\
& = & 9.k + 3.4^n + 6 \text{ (l'hypothèse de récurrence)} \\
& = & 9.k + 3\,(9k - 6n + 1) + 6 = 9\,(k + 3k - 2n + 1) \\
& \Rightarrow & 4^{(n+1)} + 6\,(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 9.
\end{array}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

2) Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, {}_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \,(R_n)$

Si $n = 1, {}_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow R_1$ est vraie.
Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$${}_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$$

En effet:

$$\begin{array}{rcl}
{}_{k=1}^{n+1} k^3 & = & {}_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
& = & \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
& = & (n+1)^2 \left[\dfrac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
& = & (n+1)^2 \left[\dfrac{n^2 + 4n + 4}{4}\right] \\
& = & \dfrac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} \\
& \Rightarrow & (R_{n+1}) \text{ est vraie.}
\end{array}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, {}_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}.$$

Calculons: $S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n+1)^3$

$$\begin{array}{rcl}
S & = & \left[{}_{k=1}^{2n+1} k^3\right] - \left[2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^3\right] \\
& = & \dfrac{(2n+1)^2\,(2n+2)^2}{4} - \left[2^3\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3\right)\right]. \\
& = & \dfrac{(2n+1)^2\,(2n+2)^2}{4} - 2^3\left[\dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}\right].
\end{array}$$

3) pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on a:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k}.$$

En déduire:

$$\sum_{k \text{ est pair}}^{n} C_n^k . x^k \ .$$

Preuve:

Montrons par récurrence que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on a:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k}.$$

Cette formule est dite: binôme de NEWTON.
Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^{1-0} + C_1^1 a^1 b^{1-1} = b + a = (a+b)^1$$

Supposons que pour un $n \geq 1$ fixé on a:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

et montrons que:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \ a^k \ b^{n+1-k}.$$

En effet:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

D'autre part:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k}\ a^{k}\ b^{n+1-k} &= C_{n+1}^{0}\ a^{0}\ b^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k}\ a^{k}\ b^{n+1-k}+C_{n+1}^{n+1}\ a^{n+1}\ b^{n+1-(n+1)} \\
&= C_{n}^{0}\ a^{0}\ b^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{n}^{k-1}+C_{n}^{k}\right)\ a^{k}\ b^{n+1-k}+C_{n}^{n}\ a^{n+1}\ b^{n+1-(n+1)} \\
\text{car:}\quad & C_{n+1}^{k}=\left(C_{n}^{k-1}+C_{n}^{k}\right) \text{ et } C_{n+1}^{n+1}=C_{n}^{n} \\
&= C_{n}^{0}\ a^{0}\ b^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k-1}\ a^{k}\ b^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}\ C_{n}^{k}a^{k}\ b^{n+1-k}+C_{n}^{n}\ a^{n+1}\ b^{n+1-(n+1)} \\
&= C_{n}^{0}a^{0}b^{n+1-0}+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n}^{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k}a^{k}b^{n+1-k}+C_{n}^{n}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)} \\
\text{car:}\quad & \sum_{k=1}^{n} f\ \ (k-1)=\sum_{k=0}^{n-1} f\ \ (k)=f\ \ (0)+f\ \ (1)+...+f\ \ (n-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{n}^{0}\ a^{0}\ b^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n}\ C_{n}^{k}a^{k}\ b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n}^{k}\ a^{k+1}\ b^{n-k}+C_{n}^{n}\ a^{n+1}\ b^{n-n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}a^{k}b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}a^{k+1}b^{n-k}=(a+b)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

En déduire:

$$\sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ C_{n}^{k}.x^{k}\ .$$

Il suffit de poser:

$$A=\sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ C_{n}^{k}.x^{k} \text{ et } B=\sum_{k \text{ est impair}}^{n}\ C_{n}^{k}.x^{k}$$

On a:

$$
\begin{aligned}
A+B &= \sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ C_{n}^{k}.x^{k}+\sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ C_{n}^{k}.x^{k}=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}.x^{k} \\
\text{et } A-B &= \sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ C_{n}^{k}.x^{k}-\sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ C_{n}^{k}.x^{k} \\
&= \sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ (-1)^{k}\, C_{n}^{k}.x^{k}+\sum_{k \text{ est pair}}^{n}\ (-1)^{k}\, C_{n}^{k}.x^{k}=\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\, C_{n}^{k}.x^{k}
\end{aligned}
$$

Ce qui donne:

$$
\begin{aligned}
A+B &= \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}.x^{k}=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}.x^{k}.1^{n-k}=(x+1)^{n} \\
A-B &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\, C_{n}^{k}.x^{k}=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}.\,(-x)^{k}.1^{n-k}=(1-x)^{n}
\end{aligned}
$$

La somme des deux équation donne:

$$A = \frac{(x+1)^n + (1-x)^n}{2}.$$

Exercice 06:

1) Soient A et B deux ensembles, simplifier la négation de l'expression suivante: $(x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B)$.

La négation est: $x \in A$ et $x \notin A \triangle B$
$\Leftrightarrow x \in A$ et $\left[x \in A \cap B \text{ ou } x \in C_E^{A \cup B}\right]$
$\Leftrightarrow [x \in A \text{ et } x \in A \cap B]$ ou $\left[x \in A \text{ et } x \in C_E^{A \cup B}\right]$ d'après la distributivité de et par rapport à ou.
$\Longleftrightarrow x \in A \cap B$ car $\left[x \in A \text{ et } x \in C_E^{A \cup B}\right]$ est impossible a vérifiée.

2) Donner deux propositions équivalentes à la proposition suivante: $(x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B)$.

On pose: $(P) : x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B$.**La première:** $(P) \Leftrightarrow \left(\bar{\bar{P}}\right)$
d'après la 1ère question: $\left(\bar{P}\right) \Leftrightarrow x \in A \cap B$ ce qui donne:

$$(P) \Leftrightarrow \left(\bar{\bar{P}}\right) \Leftrightarrow x \notin A \cap B.$$

La deuxième: la contraposée: $(P) \Leftrightarrow [x \notin A \triangle B \Rightarrow x \notin A]$

3) A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$. Montrer que:

a) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

Preuve: $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

"$\Rightarrow$ " Montrons que: $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$

a) $B \subset A$, si $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subset A$

b) $A \subset C$, si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C \Rightarrow A \subset C$

$\Rightarrow B \subset A \subset C$

"$\Leftarrow$ "$B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$

a) $A \cup B \subset A \cap C$, si $x \in A \cup B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \Rightarrow x \in C \\ \text{ou } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C \end{array} \right. \Rightarrow x \in A \cap C$

b) $A \cap C \subset A \cup B$, si $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

b) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B$

Preuve: a) Montrons que: $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$

si $x \in C_E^B \Rightarrow x \in E$ et $x \notin B \Rightarrow x \in E$ et $x \notin A$ car $A \subset B \Rightarrow x \in C_E^A$

b) Montrons que: $C_E^B \subset C_E^A \Rightarrow A \cup B = B$

1) $A \cup B \subset B$?

si $x \in A \cup B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B} \\ \text{ou } \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{array} \right. \Rightarrow x \in B$

2)$B \subset A \cup B$ évident .

c) Montrons que: $C_E^B \subset C_E^A \Rightarrow A \subset B$?

si $x \in A \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow x \in B$.

c) $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

"$\subset$ "$C_E^{A \cap B} \subset C_E^A \cup C_E^B$?
si $x \in C_E^{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \in C_E^A$ ou $x \in C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B$
"$\supset$ " $C_E^A \cup C_E^B \subset C_E^{A \cap B}$
si $x \in C_E^A \cup C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A$ ou $x \in C_E^B \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in C_E^{A \cap B}$.

d) $A \setminus B = \left(C_E^B\right) \setminus \left(C_E^A\right)$.

Soit $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \notin C_E^A$ et $x \in C_E^B \Leftrightarrow x \in \left(C_E^B\right) \setminus \left(C_E^A\right)$.

e) Montrer par **contraposée** que: $[(A \cap B = A \cap C)$ et $(A \cup B = A \cup C)] \Rightarrow (B = C)$.

Montrons que: $(B \neq C) \Rightarrow [(A \cap B \neq A \cap C)$ ou $(A \cup B \neq A \cup C)]$
Si $B \neq C$
1er cas: S'il existe $x_0 \in B$ et $x_0 \notin C$:
On a deux cas:
a) Si $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \cap B$ et $x_0 \notin A \cap C \Rightarrow A \cap B \neq A \cap C$.
b) Si $x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in A \cup B$ et $x_0 \notin A \cup C \Rightarrow A \cup B \neq A \cup C$.
2ème cas: S'il existe $x_0 \in C$ et $x_0 \notin B$:
On a deux cas:
a) Si $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \cap C$ et $x_0 \notin A \cap B \Rightarrow A \cap C \neq A \cap B$.
b) Si $x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in A \cup C$ et $x_0 \notin A \cup B \Rightarrow A \cup C \neq A \cup B$.
Conclusion: On a: $[(A \cap B \neq A \cap C)$ ou $(A \cup B \neq A \cup C)]$.

Exercice 07:

1) 1) Soit $E = \{a, b\}$.

a) Déterminons $P(E)$.

$$P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

b) Déterminons $P(P(E))$.

$$P(P(E)) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a,b\}\} \\ \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \\ \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}, P(E) \end{array} \right\}$$

2) Soit $F = \{1, 2, 3\}$.

a) Déterminons $P\ (F)$.

$$P\ (F) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

b) Complétons les propositions suivantes par les symboles: $\in, \notin, \subset$.

$$\begin{array}{l} i)\ 1 \quad \notin \quad P\ (F), ii)\ \ \{1,2\} \subset F, iii)\ \ \{1,2\} \in P\ (F) \\ iv)\ \emptyset \quad \subset \quad F, \qquad v)\ \emptyset \in P\ (F) \qquad vi)\ \{\emptyset\} \notin P\ (F) \quad \text{ou} \ \{\emptyset\} \subset P\ (F)\ . \end{array}$$

Exercice 08: **1)** X étant un ensemble quelconque, on note $P\,(X)$ l'ensemble des parties de X.

Soient Aet B deux ensembles quelconques.

a) A-t-on $P\ (A \cup B) = P\ (A) \cup P\ (B)$? Justifier votre réponse.
Non il suffit de prendre:

$$A = \{1,2\} \text{ et } B = \{3\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3\}$$

On a:

$$\begin{aligned} P\ (A) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, P\ (B) = \{\emptyset, \{3\}\} \\ &\Rightarrow P\ (A) \cup P\ (B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}\} \end{aligned}$$

et

$$P\ (A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Conclusion:

$$P\ (A \cup B) \neq P\ (A) \cup P\ (B).$$

b) A-t-on $P\ (A \cap B) = P\,(A) \cap P\,(B)$? Justifier votre réponse.
Oui car:
$X \in P\ (A \cap B) \Leftrightarrow X \subset A \cap B \Leftrightarrow X \subset A$ et $X \subset B \Leftrightarrow X \in P\ (A)$ et $X \in P\,(B) \Leftrightarrow X \in P$ $(A) \cup P\ (B)$.

2) Montrons par deux méthodes différentes que:

$$Card\ E = n \Rightarrow Card\ P\,(E) = 2^n.$$

Soients E un ensemble non vide, et $P\ (E)$ l'ensemble de ses parties. On suppose que $card\ E = n$.

1ère méthode:

Montrer par récurrence que:

$$card\ P\ (E) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par récurrence:

1ère étape: Pour un ensemble qui contient un seul élément par exemple: $E = \{a\} \Rightarrow P\ (E) = \{\varnothing, \{a\}\}$
$\Rightarrow card\ P\ (E) = 2^1 = 2$
donc la relation est vraie pour $n = 1$
2ème étape: supposons que pour un ensemble A_n qui contient n éléments alors: $card\ P\ (A_n) = 2^n$
et montrons que pour un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: $card\ P\ (A_{n+1}) = 2^{n+1}$
En effet: si on a un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: l'ensemble des parties contient les sous ensembles
qui ont un lien avec les n premiers éléments qui sont 2^n sous ensembles d'après l'hypothèse de récurrence.
On ajoute les mêmes sous enembles mais qui contients l'élément d'ordre $(n+1)$ à chaque fois.
Pour mieux comprendre pour les singleton il manque l'ensemble qui contient le $(n+1)^{ème}$ élément ç-à-d on a ajouté l'élément $n+1$ à l'ensemble vide et pour les éléments qui contients deux éléments on ajoute à chaque singleton de l'hypothèse de récurrence l'élément $n+1$ et ainsi de suite.
$\Rightarrow card\ P\ (A_{n+1}) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.
conclusion:

$$card\ P\ \ (E) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On donne un exemple pour l'étape 2:
Si $n = 3$ par exemple: $E_3 = \{a, b, c\}$ et $E_4 = \{a, b, c, d\}$
On a: $P\ (E_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
et $\qquad P\ (E_4) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \\ \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} \end{array} \right\}$
Donc la première ligne contient les même sous ensembles que $P\ (E_3)$ et la deuxième à chaque sous ensemble de la première ligne on ajoute l'élément d.

2ème méthode: **Rappel:** Le nombre de choix de k élément parmis les n éléments est: C_n^k.

Alors si on a un ensemble E qui contient n élément on va construire des sous ensembles inclus dansl'ensemble E, on commence par les sous ensemble qui contient zéro élément parmis les n, ensuite un élément parmis les n, et par suite deux éléments parmis les n ,... et on termine par n élément parmis les n.
Donc d'après le rappel le nombre de ses sous ensembles est:

$$\begin{aligned} card\ P\ \ (E) &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k . 1^k . 1^{n-k} \\ &= (1+1)^n = 2^n. \end{aligned}$$

62862764463162d645629
6446464862764462f64a646 62764462f639627621