

$$z = \frac{z_1}{z_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \\ \arg z = \arg \frac{z_1}{z_2} = (\arg z_1) - (\arg z_2) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{array} \right.$$

$$\arg z = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad |k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi :  $z = \left[ \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right] = e^{i(\pi/12)}$

2. Calculer  $z^n + \frac{1}{z^n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

Remarquons que :

$$z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + z^{-n} \quad \left( \begin{array}{l} \text{en appliquant la formule de} \\ \text{Moivre} \end{array} \right)$$

$$= \left[ \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right]^n + \left[ \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right]^{-n}$$

$$= \cos \left( n \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( n \frac{\pi}{12} \right) + \cos \left( -n \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -n \frac{\pi}{12} \right) \quad \left( \begin{array}{l} \cos \text{ est} \\ \text{paire} \\ \text{et} \sin \\ \text{est impair} \end{array} \right)$$

$$= \cos \left( n \frac{\pi}{12} \right) + i \cancel{\sin \left( n \frac{\pi}{12} \right)} + \cos \left( n \frac{\pi}{12} \right) - i \cancel{\sin \left( n \frac{\pi}{12} \right)}$$

$$= 2 \cos \left( n \frac{\pi}{12} \right)$$

• En déduire la valeur exacte de  $z^{2028} + \frac{1}{z^{2028}}$

$$z^{2028} + \frac{1}{z^{2028}} = 2 \cdot \cos \left( 2028 \cdot \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 2 \cos \left( 169 \pi \right)$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= (-1)}$$

$$= -2$$

## M. Racines n-ième d'un nombre complexe

Définition: Pour tout  $w \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , une racine n-ième de  $w$  est un nombre  $z$  tel que

$$z^n = w.$$

### M-1 Les racines carrées d'un nombre complexe

On se donne un nombre complexe  $w = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On cherche les nombres complexes  $z = x + iy$  où  $x, y \in \mathbb{R}$ , tels que  $z^2 = w$

On sait que :

$$z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2| = |w| \\ (x+iy)^2 = a+ib \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = |w| & \langle \text{car } |z^n| = |z|^n \rangle \\ (x^2 - y^2 + 2ixy) = a + ib \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad \begin{aligned} &\langle \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re} w \rangle \\ &\langle \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im} w \rangle \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{--- (1)} \\ x^2 - y^2 = a & \text{--- (2)} \\ 2xy = b & \text{--- (3)} \end{cases}$$

En combinant (1) + (2) et (1) - (2) on

obtient :

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ y = \mp \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ 2xy = b \end{cases}$$

• L'équation  $2xy = b$  permet de déterminer le signe de  $x$  et  $y$  selon le signe de  $b$ .

En effet si  $b > 0$  alors  $x$  et  $y$  sont de même signe, et si  $b < 0$  alors  $x$  et  $y$  sont de signe opposé.

### Exemple 1.

Soit à déterminer les racines carrées du nombre complexe  $3 - 4i$  (c.à.d. les solutions de  $z^2 = 3 - 4i$ )

Soit  $z = x + iy$  où  $x, y \in \mathbb{R}$ .

On a :

$$z^2 = 3 - 4i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |z|^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ (x + iy)^2 = 3 - 4i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

En combinant (1) + (2) et (1) - (2) on obtient

$$\begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp 2 \\ y = \mp 1 \\ x, y = -2 < 0 \end{cases}$$

L'équation  $x \cdot y = -2$  signifie que  $x$  et  $y$  sont de signe opposé.

Donc les solutions <sup>(x,y)</sup> du système (S) sont:  
 $(2, -1)$  et  $(-2, 1)$ .

Conclusion: Les racines carrées de  $(3-4i)$  sont  
 $z_1 = 2-i$  et  $z_2 = -2+i$

Exemple 02 (Examen) "Pour réviser"

Soit  $z = x + iy$ , où  $x, y \in \mathbb{R}$ .

1) Déterminer  $x$  et  $y$  tel que:  $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

2) En déduire les solutions de:

$$\left( \frac{w+i}{w-i} \right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

où  $w$  est un nombre complexe.

Corrigé

1) On a

$$\begin{aligned} z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} & \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2| = |z|^2 = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \\ x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 2\sqrt{3} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ x^2 - y^2 = -2 & (2) \\ 2xy = 2\sqrt{3} > 0 & (3) \end{cases}$$

En combinant (1)+(2) et (1)-(2) on obtient:

$$\begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 6 \\ xy = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp \sqrt{3} \\ x \cdot y = \sqrt{3} > 0 \end{cases}$$

L'équation  $x \cdot y = \sqrt{3} > 0$  signifie que  $x$  et  $y$  sont de même signe

Conclusion les racines carrées de  $(-2 + 2i\sqrt{3})$  sont

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

2) En déduire les solutions de  $\left(\frac{w+i}{w-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3} / w \in \mathbb{C}$

« D'après la question précédente l'équation:  $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$  possède deux solutions  $z_1$  et  $z_2$  déjà déterminées, donc il suffit de poser  $z = \frac{w+i}{w-i}$  et de tirer  $w$  en fonction de  $z_{1,2}$ . »

$$\text{On pose } z = \frac{w+i}{w-i}$$

$$z = \frac{w+i}{w-i} \Leftrightarrow z(w-i) = w+i$$

$$\Leftrightarrow w(z-1) = i(1+z)$$

$$\Leftrightarrow w = i \frac{1+z}{z-1}$$

En remplaçant  $z$  par  $z_1$  et  $z_2$ , on trouve deux solutions :

$$w_1 = i \frac{1+z_1}{z_1-1} = i \frac{1+1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i$$

$$\begin{aligned} w_2 &= i \frac{1+z_2}{z_2-1} = i \frac{1+(-1-i\sqrt{3})}{-1-i\sqrt{3}-1} = \frac{-\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} \\ &= \frac{-\sqrt{3}(2-i\sqrt{3})}{(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{1}{7} [-2\sqrt{3} + 3] = -\frac{2\sqrt{3}}{7} + \frac{3}{7}i$$

Exercice  $\hat{=}$  Trouver les racines carrées de  $(8-6i)$  dans  $\mathbb{C}$ .