

Chapitre 02 : Nombres complexes

1- Definition

L'ensemble des nombres complexes s'écrit :

$$\mathbb{C} = \{ z = a + ib \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad i^2 = -1 \}$$

2- Forme Algébrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + i^1 b$ un nombre complexe avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $a+ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z
- a est la partie réelle de z , notée $\operatorname{Re} z$
- a " " " " imaginaire de z , " $\operatorname{Im} z$.
- Si $\operatorname{Re} z = 0$ alors $z = ib$ est un imaginaire pur
- L'ensemble des imaginaires ~~est~~ purs est noté $i\mathbb{R}$.
- Si $\operatorname{Im} z = 0$ alors $z = a$ est un réel.
- Le nombre $\bar{z} = a - ib$ est appelé le Conjugué de z .

Examples: $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$?

3. Règles de Calculs dans $\mathbb{C}$ Soit $z = x + iy$

- $\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$.
- La forme algébrique d'un nombre complexe est unique donc.

$$z_1 = z_2 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

- Polar form $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.
- $z_1 \times z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

4- Propriétés du conjugué

$$\bullet \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{z'} \right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$$

$$\bullet (\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$$

$$\bullet \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\bullet z + z' = 2 \operatorname{Re} z$$

$$\bullet z - z' = 2 \operatorname{Im} z$$

$$\bullet \overline{\overline{z}} = z$$

⚠ Imp $\forall z \in \mathbb{C} : z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R} \quad (\text{Réal Pur})$
 $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R} \quad (\text{imaginaire Pur})$

Exemple $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$

5- Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif noté $|z|$, avec $|z| = \sqrt{z \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriétés:

$$\bullet |z| = 0 \iff z = 0$$

$$\bullet |z| = |\overline{z}|$$

$$\bullet |-z| = |z|$$

$$\bullet \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\bullet |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

$$\bullet |z \cdot z'| = |z| \times |z'|$$

$$\bullet |z^n| = |z|^n$$

$$\bullet \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\bullet |z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{inégalité triangulaire}$$

$$\bullet AB = |z_B - z_A| \text{ est la distance entre } z_B \text{ et } z_A$$

$$\bullet |z| = |z - 0| \text{ est la distance entre } z \text{ et l'origine.}$$

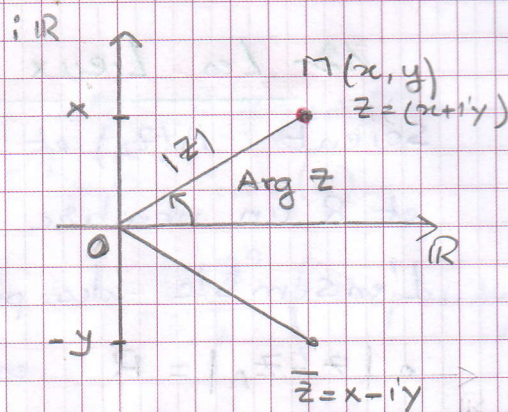
Exemple: $|z_1| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8}$, $|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$, $|z| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$

6- Représentation géométrique

• Chaque nombre complexe $z = x + iy$

correspond à un point $M(x, y)$ dans le plan des coordonnées cartésiennes.

- $z = x + iy$ s'appelle L'affixe de M .
- Le point M s'appelle L'image de z .



7: Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'argument de z , noté $\arg z$, est l'angle (en radians) entre le vecteur $\vec{OM}$ et l'axe des réels positifs dans le plan complexe.

- Il n'est pas unique : on peut ajouter ou soustraire n'importe quel multiple de 2π .

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \arg z = \theta [2\pi]$$

$\theta \text{ modulo } 2\pi$

- L'argument principal noté $\text{Arg}(z)$ est l'unique argument choisi dans l'intervalle :

$$\text{Arg} z \in]-\pi, \pi]$$

- Si $\theta = \arg(z)$ alors θ vérifie
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases} \quad \text{avec } |z| \neq 0$$

8: Forme Trigonométrique - Forme Exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

- La forme trigonométrique de z est

$$\begin{aligned} z &= r [\cos \theta + i \sin \theta] \\ &= |r| [\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)] \end{aligned}$$

- La forme Exponentielle ou d'Euler

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} \\ &= |z| e^{i(\arg z)} \end{aligned}$$

- Formule de Moivre Pour tout entier relatif n et tout réel θ , on a

$$[\cos \theta + i \sin \theta]^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

- Formules d'Euler

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Résultats Importants

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n \\ &= |z|^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \\ &= |z|^n \cdot e^{in\theta} \end{aligned}$$

Formule de Moivre

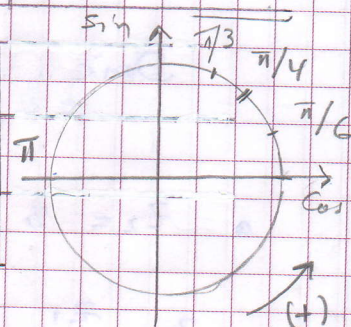
Formule d'Euler

9. Cas Particuliers

$$\arg(z) = \theta [2\pi]$$

	Forme Algébrique	Argument	Forme Trigonométrique	Forme Exponentielle
$z \in \mathbb{R}$	$z = a$ $z = -a$	$\theta = 0 [2\pi]$ $\theta = \pi [2\pi]$	$z = a [\cos 0 + i \sin 0]$ $z = a [\cos \pi + i \sin \pi]$	$z = a e^{i0}$ $z = a e^{i\pi}$
$z \in i\mathbb{R}$	$z = bi$ $z = -bi$	$\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ $\theta = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$	$z = a [\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}]$ $z = a [\cos (-\frac{\pi}{2}) + i \sin (-\frac{\pi}{2})]$ $= a [\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}]$	$z = a e^{i\pi/2}$ $z = b e^{-i\pi/2}$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin \theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0



10- Propriétés de l'argument: Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- $\arg(z \cdot z') = (\arg z) + (\arg z')$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z = \arg(\bar{z})$
- $\arg z^n = n \arg z$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Arg } z = (\text{Arg } z') + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice - Important - Contrôle Continu

On considère les nombres complexes suivants.

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, \quad z_2 = 2 + 2i \quad \text{et} \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

- 1) Écrire la forme trigonométrique et exponentielle de z_1, z_2 et z .
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $z^n + \frac{1}{z^n}$ et en déduire la valeur exacte de $z^{2028} + \frac{1}{z^{2028}}$.

Corrigé

1. Forme Trigonométrique

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, \quad z_1 = |z_1| [\cos \theta + i \sin \theta]$$

$$|z_1| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \arg z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \theta = \text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{3} [2\pi] = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } z_1 = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right] = 2\sqrt{2} e^{i\pi/3}$$

$$z_2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$