

## 11-2- Équation du second degré.

### Proposition

L'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  
où  $a, b, c \in \mathbb{C}$  et  $a \neq 0$  possède deux  
solutions  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , éventuellement confondues.

Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant et  
 $s \in \mathbb{C}$  la racine carrée de  $\Delta$ .

Alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + s}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - s}{2a}$$

Remarque Si on s'autorise à écrire  $s = \sqrt{\Delta}$ ,  
On obtiendrait la même formule que celle  
que connaissez lorsque  $a, b, c$  sont réels.

Exemples : Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , les équations suivantes :

☐  $z^2 + z + 1 = 0$  ,  $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$  ,  $s = i\sqrt{3}$ .

Les solutions sont donc

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

☐  $2z^2 + 4\sqrt{2}z + 3i = 0$  ... (E)

$$\Delta = (4\sqrt{2})^2 - 4(3i) = 16 \cdot 2 - 12i = 4(8 - 3i)$$

Notons  $s$  une racine carrée de  $\Delta$ , donc

$$s = 2 \times [\text{racine carrée de } (8 - 3i)]$$

• Cherchons les racines carrées de  $(8 - 3i)$

Soit  $w = x + iy$  tel que  $w^2 = 8 - 3i$  ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$w^2 = 8 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} |w|^2 = |8 - 3i| \\ (x + iy)^2 = 8 - 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w|^2 = \sqrt{8^2 + (-3)^2} = \sqrt{73} \\ x^2 - y^2 + 2xyi = 8 - 3i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = 8 & (2) \\ 2xy = -6 & (3) \end{cases}$$

En combinant (1) + (2) et (1) - (2) on obtient :

$$\begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \mp 1 \\ x \cdot y = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \text{ et } y \text{ sont} \\ \text{de signe opposé} \end{matrix}$$

les racines carrées de  $(8-6i)$  sont

$$w_1 = 3-i \quad \text{et} \quad w_2 = -3+i$$

Donc les racines carrées de  $\Delta$  sont :

$$s_1 = 2w_1 = 2(3-i) \quad \text{et} \quad s_2 = 2w_2 = 2(-3+i)$$

Conclusion

Les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-4\sqrt{2} - 2(3-i)}{2(2)} = -\left(\frac{2\sqrt{2}+3}{2}\right) + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-4\sqrt{2} + 2(3-i)}{2(2)} = -\left(\frac{-2\sqrt{2}+3}{2}\right) - \frac{1}{2}i$$

### 11-3: Racines n-ièmes d'un nombre complexe

On se donne un nombre complexe non nul  $w = r e^{i\theta}$  et  $n$  un entier naturel ( $n \geq 2$ ).

On cherche les nombres complexes  $z = \rho e^{i\alpha}$  tels que  $z^n = w$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} r = |w| \quad \text{et} \quad \rho = |z| \\ \theta = \arg w \quad \text{et} \quad \alpha = \arg z \end{array} \right.$$

Théorème Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tout nombre complexe non nul,  $w = r e^{i\theta}$  admet exactement  $n$  racines n-ième distinctes de la forme :

$$z = r^{1/n} e^{i \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$$

avec

$$= \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

Preuve Soient  $w = r e^{i\theta}$  et  $z = \rho e^{i\alpha}$  tels que  $z^n = w$ , donc.

$$z^n = w \Leftrightarrow (\rho e^{i\alpha})^n = (r e^{i\theta})$$

$$\Leftrightarrow \rho^n e^{i n \alpha} = r e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} = r^{1/n} \\ \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Mais ATTENTION Les  $n$  racines  $n$ -ièmes distinctes sont obtenues seulement pour :  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , à partir de  $k=n$  on retombe sur les mêmes racines par périodicité. Donc  $z = r^{1/n} e^{i(\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi))}$   $k = 0, 1, \dots, n-1$ .  $\square$

Exemples

1- Calculez les racines cubiques de  $i$ .

2- " " " "  $n$ -ième de 1

Corrigé 1) Calculons les racines cubiques de  $i$  ( $z^3 = i$ )

Rappelons que  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  ( $|i| = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$ )

Cherchons  $z = \rho e^{i\alpha} / z^3 = i$

$$\rho^3 (e^{i\alpha})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = \frac{1}{3} \left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right] / k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

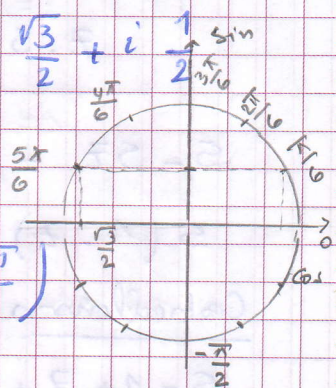
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k \quad / k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

• L'ensemble de solutions de l'équation  $z^3 = i$   
 « qui est l'ensemble des racines cubiques  
 de  $i$  » est donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{ \bar{z}_k = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i} \mid k = 0, 1, 2 \right\}$$

$k=0$   $z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} = \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$

$k=1$   $z_1 = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)i}$   
 $= e^{\frac{5\pi}{6}i} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$   
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$



$k=2$   $z_2 = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)i} = e^{\left(\frac{9\pi}{6}\right)i} = e^{\left(\frac{3}{2}\pi\right)i}$   
 $= e^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)i}$  (voir la remarque)  
 $= \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} = -i$

### Remarque

Comme  $\arg z_2 = \frac{3}{2}\pi \notin ]-\pi, \pi]$ , donc il n'est pas principal. Il suffit de lui soustraire (retrancher -)  $2\pi$  pour lui rendre principal

$$\left(\frac{3}{2}\pi - 2\pi\right) = -\frac{\pi}{2}$$

### Proposition.

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  différent de 1.

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Preuve

Posons:

$$S = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n$$

$$z \cdot S = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + z^{n+1}$$

$$S - zS = 1 - z^{n+1}$$

$$S(1 - z) = 1 - z^{n+1} \Rightarrow S = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Conclusion:

$$S = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Exemple.

$$\text{Calculer: } 1 + e^{i \frac{2\pi}{5}} + e^{i \frac{4\pi}{5}} + e^{i \frac{6\pi}{5}} + e^{i \frac{8\pi}{5}}$$

Corrigé.

$$\text{Posons: } S = 1 + e^{i \frac{2\pi}{5}} + e^{i \frac{4\pi}{5}} + e^{i \frac{6\pi}{5}} + e^{i \frac{8\pi}{5}}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \left( e^{i \frac{2\pi}{5}} \right) + \left( e^{i \frac{2\pi}{5}} \right)^2 + \left( e^{i \frac{2\pi}{5}} \right)^3 + \left( e^{i \frac{2\pi}{5}} \right)^4 \\ &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 \quad / \quad z = e^{i \frac{2\pi}{5}} \end{aligned}$$

$$\text{On sait que: } 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \text{ avec } z \neq 1$$

$$\text{Donc } S = \frac{1 - \left( e^{i \frac{2\pi}{5}} \right)^5}{1 - e^{i \frac{2\pi}{5}}} = \frac{1 - \underbrace{e^{i 2\pi}}_{=1}}{1 - e^{i \left( \frac{2\pi}{5} \right)}}$$

$$e^{i 2\pi} = \overset{1}{\cos 2\pi} + i \overset{0}{\sin 2\pi} = 1$$

$$S = \frac{1 - 1}{1 - e^{i \left( \frac{2\pi}{5} \right)}} = 0$$