

Exercice (Pour les étudiants)

- ① Déterminer les racines n -ièmes de 1. (l'unité)
- ② En déduire les solutions de l'équation:

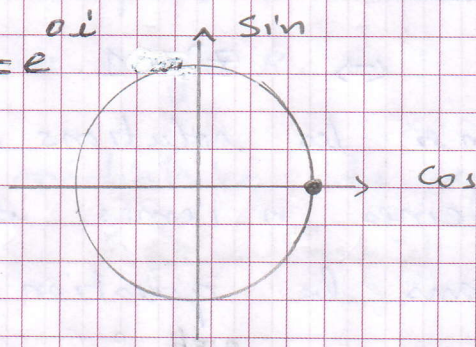
$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$$

Corrigé

- ① Les racines n -ièmes de 1 sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.

• Forme Exponentielle de 1 = e^{0i}

Car
$$\begin{cases} w = 1 = 1 + 0i \\ |w| = 1 \\ \theta = \arg w \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = 1 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}.$$

Donc $1 = e^{0i}$

• cherchons $z = \rho e^{i\alpha}$ tel que $z^n = 1$.

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \rho^n \cdot e^{in\alpha} = 1 \cdot e^{0i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\alpha = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Les n racines n -ièmes distinctes sont données par:

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad / k = 0, 1, \dots, n-1$$

L'ensemble de solutions de $z^n = 1$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)i} / k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} = \left\{ 1, e^{\left(\frac{2\pi}{n}\right)i}, e^{\left(\frac{4\pi}{n}\right)i}, \dots \right\}$$

② En déduire les solutions de l'équation
 $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0 \dots (E)$

on sait que $1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ (Proposition)

donc :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \quad \text{ou} \quad z \neq 1.$$

$$\Leftrightarrow z^n = 1.$$

Ainsi les solutions de l'équation (E) sont les racines n -ièmes de 1, déjà déterminées dans la question 1/; c.à.d.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ e^{\frac{2\pi k}{n} i} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} \\ &= \left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{n} i}, e^{\frac{4\pi}{n} i}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

② En déduire les solutions de l'équation
 $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0 \dots (E)$

on sait que $1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ (Proposition)

donc :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \quad \text{ou} \quad z \neq 1.$$

$$\Leftrightarrow z^n = 1.$$

Ainsi les solutions de l'équation (E) sont les racines n -ièmes de 1, déjà déterminées dans la question 1/; c.à.d.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ e^{\frac{2\pi k}{n} i} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} \\ &= \left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{n} i}, e^{\frac{4\pi}{n} i}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

12- Les Lieux géométriques et nombres complexes

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux nombres complexes et R un nombre réel positif.

L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant :

• $|z - z_A| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R .

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est l'équation du cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R .

• $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$. خط الوسيط لـ $[AB]$

Exemple

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant :

$$|z - 1 + 2i| = 3$$

Corrigé

Soit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + iy - 1 + 2i| = 3$$

$$\Leftrightarrow |(x-1) + i(y+2)| = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y - (-2))^2 = 3^2$$

L'ensemble des points vérifiant $|z - 1 + 2i| = 3$ est un cercle de centre $(+1, -2)$ et de rayon 3.

