Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatique

1ère Année Licence Informatique - 2025–2026

Analyse 1
Fiche de TD 1
Les nombres réels

Exercice 1.

Considérons deux nombres rationnels r_1 et r_2 tels que $r_1 < r_2$. Notons :

$$x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$$

1) Montrer que $x \in]r_1, r_2[$.
2) Montrer que x est irrationnel.
3) Quel résultat général peut-on conclure de cela ?

Exercice 2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}^+$. Montrer que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$.

Exercice 3.

Déterminer chacun des ensembles suivants, puis les exprimer sous forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou d'une réunion d'intervalles.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \ , \ (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap]-4, 5]$.
b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \ , \ \frac{3x}{x+2} \leq 1\right\}$.
c) $C = \left\{x \in \mathbb{R}^* \ , \ \frac{1}{|x|} > 2\right\}$.
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \ , \ |3x - 2| \geq 1\}$.

Exercice 4.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer :

1) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$.
2) En déduire que $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $|x^2 - 3| = 2x$.
2) $|2 - 3x| + |5 - x| \geq 1$.

Exercice 6.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $E(\sqrt{x^2 + 1}) = 2$.
b) $5E(x^3 - 8) = 2$.
c) $E(3x) < 4$.
d) $1 < E(2x) + 2 < 5$.
e) $E(|x + 3|) = 1$.
f) $E(x^2 - x + 2) - x = 1$.

Exercice 7.

Pour chacun des ensembles suivants :

$$A =]1,4], \quad B = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1} \ : \ x \in \mathbb{R}\right\}, \quad C = \left\{-1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\},$$

déterminer l'ensemble des majorants et celui des minorants ; la borne supérieure et la borne inférieure ; le plus grand élément et le plus petit élément (s'ils existent).

Exercice 8. (Facultatif)

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel

1) Montrer que $a = 6 + 4\sqrt{2}$ et $b = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2) Calculer $\sqrt{ab}$.
3) Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est rationnel.

Exercice 9. (Facultatif)

Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$, si $\sqrt{p} + \sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{p} - \sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10. (Facultatif)

On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que les nombres $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

Exercice 11. (Facultatif)

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2 \leq |x+1| < 3$, $|4x-1| = |2x+3|$, $||x-1| - 2|x|| \leq 3$.

Exercice 12. (Facultatif)

Résoudre : $E(x+5) = 2E(x-1)$, $5E(x^3-8) = 2$, $E(x^2 - x + 2) - x = 1$, $E(3x) < 5$, $E(x) + |x-1| = x$.

Exercice 13. (Facultatif)

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $E(2x)$ en fonction de $E(x)$.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $E(x+k) = E(x) + k$.
3) Résoudre l'équation $E(2x+1) = E(x+4)$.

Exercice 14. (Facultatif)

1) Montrer que $E\big(2\sqrt{n(n+1)}\big) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Calculer $E\big[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\big]$.

Exercice 15. (Facultatif)

Déterminer (s'ils existent) les majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure, plus grand élément et plus petit élément des ensembles :

a) $A = \{\frac{x+1}{x+2} \ , \ x \in \mathbb{R}, \ x \leq -3\}$.
b) $B = \{\frac{2n+(-1)^n}{n+1} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$.
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \ , \ \frac{(E(x))^2}{E(x)+2} \geq 1, \ E(x) < 4\}$.