

1^{ère} séance de travaux pratiques

Introduire la notion d'erreur

Méthode de régression linéaire

Exercice d'application

I - La notion d'erreur

En travaux pratiques, chaque fois qu'on effectue une mesure d'une quantité physique tel la longueur l , le temps t , l'intensité d'un courant électrique... par exemple, on fait des erreurs sur ces mesures. Ces erreurs proviennent de l'expérimentation (la personne qui prend la mesure), par exemple, lorsqu'on mesure une longueur avec une règle graduée en millimètre, on peut faire une erreur de lecture (1 mm ou plus), et elles proviennent aussi de l'appareil de mesure.

En travaux pratique, chaque quantité physique mesurée doit être affichée sous la forme :

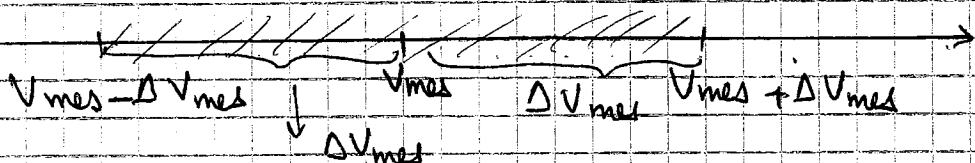
$$V = (V_{\text{mes}} \pm \Delta V_{\text{mes}}) \text{ unité}$$

avec $V_{\text{mes}} \equiv$ la valeur mesurée

$\Delta V_{\text{mes}} \equiv$ l'incertitude absolue

$\Rightarrow V_{\text{mes}}$ et ΔV ont la même unité puisqu'il s'agit de la même quantité physique.

$$V_{\text{mes}} - \Delta V_{\text{mes}} \leq V_{\text{réelle}} \leq V_{\text{mes}} + \Delta V_{\text{mes}}$$



⇒ V_{mes} et ΔV_{mes} doivent être exprimées avec la même précision.

par exemple : la mesure d'un temps de chute libre, avec son incertitude absolue est affichée :

$$t = (0,40 \pm 0,15) \text{ s}$$

Remarque : L'incertitude absolue représente le maximum d'erreur commise sur la mesure.

* Méthode de Calcul de l'incertitude absolue

Méthode logarithmique
Méthode différentielle

Méthode logarithmique

La loi d'ohm : $U = R I$

$U \equiv$ la tension aux bornes d'une résistance R

$I \equiv$ l'intensité du courant électrique traversant R

→ Introduire l'opérateur népérien $\ln$

$$U = R I \Rightarrow \ln U = \ln(R \cdot I)$$

$$\Rightarrow \ln U = \ln R + \ln I$$

→ Introduire l'opérateur dérivée

$$d(\ln U) = d(\ln R) + d(\ln I)$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{dR}{R} + \frac{dI}{I}$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{1}{R} dR + \frac{1}{I} dI$$

→ On remplace les d par Δ en prenant la valeur absolue des coefficients

$$\frac{\Delta U}{U} = \left| \frac{1}{R} \right| \Delta R + \left| \frac{1}{I} \right| \Delta I$$

$$\left| \Delta U = U \left[\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I} \right] \right|$$

⚡ de fait de considérer la valeur absolue $||$ de tous les coefficients veut dire que l'incertitude absolue représente le maximum d'erreur commise.

- lorsqu'on a dans une formule un produit ($\times$) ou une division ($\div$) Il vaut mieux choisir la méthode logarithmique.

II - Méthode de régression linéaire

C'est une méthode statistique basée sur un principe de minimisation. Son but est d'obtenir la meilleure droite possible dans le cas d'une relation linéaire entre deux variables x et y liées par :

$$y = bx + a$$

Dans le cas où $a = 0$, on aura :

$y = bx \Rightarrow$ l'éq d'une droite qui passe par l'origine $(0,0)$. Le but est de calculer le coefficient b qui représente la pente de la droite

$b \rightarrow$ donné par l'éq (7)

$\Delta y \rightarrow$ " " " (8)

$\Delta b \rightarrow$ " " " (9)

Remarque : Les équations précédentes sont valables et applicables dans le cas où :

$$\Delta x \approx 0 \quad \text{et} \quad \Delta y = \text{cst.}$$

Exercice d'application : Un réparateur de balance veut remplacer un ressort défectueux d'une balance. Le ressort doit avoir une constante de raideur $k = (3,00 \pm 0,05) \text{ N/m}$ et une masse négligeable. Dans son atelier, il a trouvé un ressort de masse négligeable mais sa constante de raideur est inconnue. A l'aide de la loi de Hooke : $F = k \times d$ où F représente la force appliquée sur le ressort, k la constante de raideur et d l'élongation, il a pu calculer la valeur de k . De ce fait, il a accroché différentes masses sur le ressort et a mesuré son élongation. La loi de Hooke se simplifie comme :

$$d = \frac{g}{k} m \quad \dots (1)$$

Les mesures sont rapportées dans le tableau ci-dessous :

Questions

1. En faisant l'identification entre la formule physique (1) avec la formule mathématique, on a :

$$\begin{cases} d = \frac{g}{k} m \\ y = b x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m \quad (\text{masse}) \\ y = d \quad (\text{élongation}) \\ b = \frac{g}{k} \end{cases}$$

On a l'éq't $d = \frac{g}{b} m \equiv y = bx$ est l'éq't d'une droite qui passe par l'origine. Donc on va calculer sa pente b donnée par l'éq't 7 (polycopié) pour obtenir la meilleure droite possible.

$$\rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i d_i}{\sum_{i=1}^5 m_i^2}$$

$i \equiv$ nombre de mesure (dans le tableau on a la $i^{\text{ème}}$ $\leftarrow$ 5 mesures $i = 1 \dots 5$)

Donc on a besoin des quantités $\sum_{i=1}^5 m_i d_i$ et $\sum_{i=1}^5 m_i^2$ ($\Sigma \equiv$ somme)

$\rightarrow$ Puis on calcule l'incertitude absolue sur la variable y : $\Delta y = \Delta d$ donnée par l'éq't (8):

$$\Delta y = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (y_i - bx_i)^2} \quad n = \text{le nombre de mesures} = 5$$

$$\Delta d = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (d_i - bm_i)^2} \equiv \text{l'incertitude absolue sur l'élongation } d.$$

Donc on a besoin de calculer la quantité $\sum_{i=1}^5 (d_i - bm_i)^2$ b est calculé précédemment.

$\rightarrow$ Puis on calcule l'incertitude sur la pente donnée par l'équation (9):

$$\Delta b = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 x_i^2}} = \frac{\Delta d}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 m_i^2}}$$

→ on va regrouper les quantités nécessaires dans le tableau suivant :

i	m_i (kg)	d_i (m)	$m_i d_i$ (m kg)	m_i^2 (kg ²)	$b m_i$ (m)	$(d_i - b m_i)^2$ (m ²)
1	0,010	0,0329	0,000329	0,0001	0,0332	$1,08 \cdot 10^{-7}$
2	0,020	0,0665	0,001330	0,0004	0,0665	$1,77 \cdot 10^{-8}$
3	0,040	0,1328	0,005312	0,0016	0,1329	$1,34 \cdot 10^{-8}$
4	0,060	0,1994	0,011964	0,0036	0,1994	$6,99 \cdot 10^{-10}$
5	0,080	0,2659	0,021272	0,0064	0,2658	$4,7 \cdot 10^{-9}$
			$\sum_{i=1}^5 m_i d_i$ =	$\sum_{i=1}^5 m_i^2$ =	$\sum 1$	$\sum_{i=1}^5 (d_i - b m_i)^2$ =
			0,040207	0,0121		$1,29 \cdot 10^{-7}$

→ A partir du tableau, on calcule la valeur de la pente :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i d_i}{\sum_{i=1}^5 m_i^2} = \frac{0,04020}{0,0121} = 3,3229 \text{ m/kg} = b /$$

Remarque : Calculer b avec une précision de 4 chiffres après la virgule.

on a $d = b m \rightarrow b = \frac{d}{m} \rightarrow \begin{matrix} m \\ m \rightarrow \text{kg} \end{matrix}$

→ b a l'unité : m/kg

Remarque importante : lorsque vous calculez la colonne : $b m_i$ dans le tableau, il faut que les deux colonnes d_i et $b m_i$ aient les mêmes valeurs à peu près. Dans le cas

contraire, il faut savoir qu'il y a une erreur dans le calcul de b , soit dans le numérateur ($\sum m_i$) ou le dénominateur ($\sum l_i^2$)

$$d = b m_i$$

→ on calcule après la valeur de Δd donnée par (8):

$$\Delta d = \Delta y = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (d_i - b m_i)^2}$$

$$\Delta d = \sqrt{\frac{1}{4} \times 1,29 \cdot 10^{-7}} = 0,00018$$

$$\Delta d = 1,8 \times 10^{-4} \text{ m}$$

→ on calcule maintenant la valeur de Δb (eq (9)):

$$\Delta b = \frac{\Delta d}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 m_i^2}}$$

AN: $\Delta b = \frac{1,8 \times 10^{-4}}{\sqrt{0,0121}} = 0,0016$

$$\Delta b = 0,0016 \text{ m/kg}$$

graphe (tracé) : $d = f(m)$

1 - les axes sur la feuille millimétrée

axe des $x \rightarrow m \text{ (kg)}$

axe des $y \rightarrow d \text{ (m)}$

2 - Echelle

* Echelle sur la masse

20 cm $\rightarrow$ 0,08 kg

1 cm $\rightarrow m_{ech}$

$$\left. \begin{array}{l} 20 \text{ cm} \rightarrow 0,08 \text{ kg} \\ 1 \text{ cm} \rightarrow m_{ech} \end{array} \right\} \Rightarrow m_{ech} = \frac{0,08}{20}$$

$$/ m_{ech} = 0,004 \text{ kg} /$$

Donc pour les points (1^{er} par exemple)

1 cm $\rightarrow$ 0,004 kg

$m_1(\text{cm}) \rightarrow 0,01$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 0,004 \text{ kg} \\ m_1(\text{cm}) \rightarrow 0,01 \end{array} \right\} \Rightarrow m_1(\text{cm}) = \frac{0,01}{0,004}$$

$$m_1(\text{cm}) = 2,5 \text{ cm}$$

* Echelle sur l'élongation d

20 cm $\rightarrow$ 0,2659 m

1 cm $\rightarrow d_{ech}$

$$\left. \begin{array}{l} 20 \text{ cm} \rightarrow 0,2659 \text{ m} \\ 1 \text{ cm} \rightarrow d_{ech} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{ech} = \frac{0,2659}{20}$$

$$d_{ech} = 0,013 \approx 0,01$$

$$/ d_{ech} = 0,01 \text{ m} /$$

Donc pour le 1^{er} point

1 cm $\rightarrow$ 0,01 m

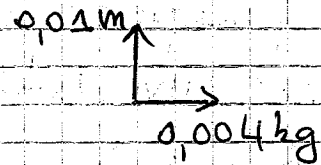
$d_1(\text{cm}) \rightarrow 0,0329$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ cm} \rightarrow 0,01 \text{ m} \\ d_1(\text{cm}) \rightarrow 0,0329 \end{array} \right\} \Rightarrow d_1(\text{cm}) = \frac{0,0329}{0,01}$$

$$\Rightarrow d_1(\text{cm}) = 3,29 \approx 3,3 \text{ cm}$$

Tableau des points en cm :

d(cm)	3,3	6,6	13,3	19,9	26,6
m(kg)	2,5	5	10	15	20



3 → Il faut représenter tous ces points sur la feuille millimétrée

4 - Représentation des barres d'erreurs verticales

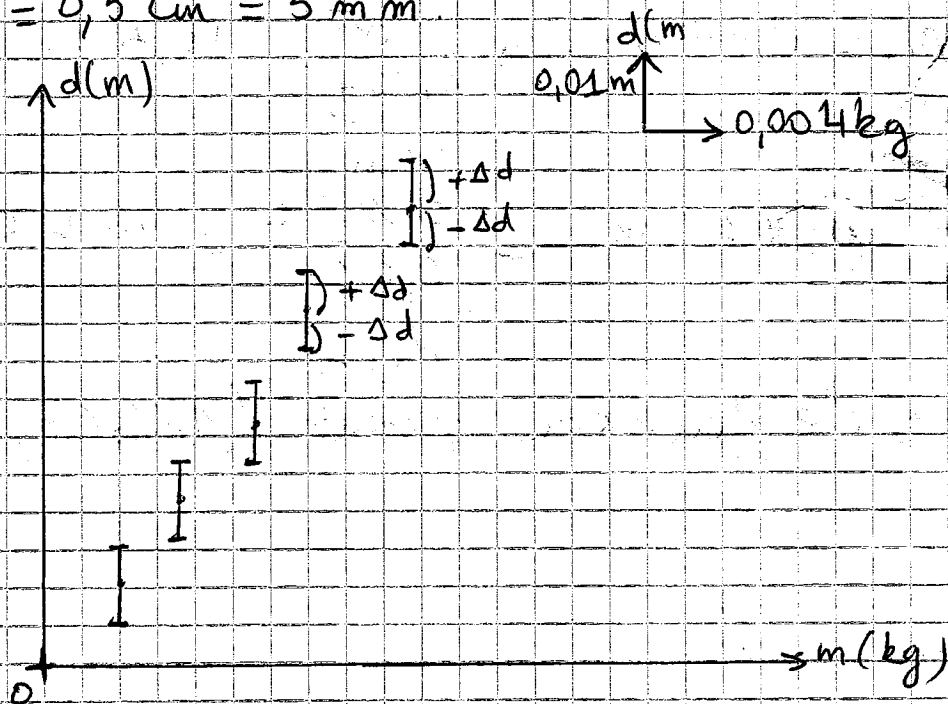
On a trouvé $\Delta d = 1,8 \times 10^{-4} \text{ m}$

$$\frac{\Delta d}{\text{dech}} = \frac{1,8 \times 10^{-4}}{0,01} = 0,018 \approx 0,02 \text{ cm}$$

→ On ne peut pas représenter ceci sur la feuille millimétrée car c'est négligeable

mais : supposons dans un autre cas on a trouvé

$$\frac{\Delta d}{\text{dech}} = 0,5 \text{ cm} = 5 \text{ mm}$$



5- Comment tracer la droite $d = f(m)$

puisque on a $d = b m \Rightarrow$ la courbe $d = f(m)$ est une droite de pente $b \Rightarrow$ On a besoin de 2 points.

$\rightarrow$ le premier point est l'origine $O(0,0)$.

$\rightarrow$ un deuxième point peut être choisi tel que on choisit une valeur de la masse mais celle-ci doit être dans l'intervalle de valeurs du tableau $m \in [0,01, 0,08]$

$m = 0,05 \text{ kg}$ par exemple

donc : $b = 3,3229 \text{ m/kg}$

ona $d = b \times m \Rightarrow d = 3,3229 \times 0,05$

$$\Rightarrow d = 0,1661 \text{ m}$$

On représente m et d en cm sur la feuille

$$m = 0,05 \text{ kg} \rightarrow \frac{0,05}{0,004} = 12,5 \text{ cm}$$

m_{ech}

$$d = 0,1661 \text{ m} \rightarrow \frac{0,1661}{0,01} = 16,6 \text{ cm}$$

d_{ech}

$\Rightarrow$ le deuxième point $(16,6 \text{ cm}, 12,5 \text{ cm})$

• Calcul de la constante de raideur du ressort k
on avait fait l'identification avant et on
a trouvé que :

$$b = \frac{g}{k} \Rightarrow k = \frac{g}{b}$$

$$\text{AN: } k = \frac{9,81}{3,3229} = 2,952 \text{ N/m}$$

Incertitude absolue sur k :

$$k = \frac{g}{b} \Rightarrow \ln k = \ln(g/b)$$

$$\Rightarrow \ln k = \ln g - \ln b$$

$$\Rightarrow d(\ln k) = d(\ln g) - d(\ln b)$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{k} = \frac{dg}{g} - \frac{db}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{k} = -\frac{db}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta k}{k} = \left| -\frac{1}{b} \right| db$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta k}{k} = + \frac{1}{b} \Delta b$$

$$\Rightarrow \Delta k = k \left[\frac{1}{b} \Delta b \right]$$

$$\text{AN: } \Delta k = 2,952 \times \frac{1}{3,3229} \times 0,0016$$

$$\Delta k = 0,001 \text{ N/m}$$

Donc :

$$\underline{k = (2,952 \pm 0,001) \text{ N/m}}$$

En conclusion ; le réparateur peut remplacer le ressort défectueux car :

le ressort doit avoir $k = (3,00 \pm 0,05) \text{ N/m}$

$$\begin{array}{c} \text{valeurs acceptables} \\ \hline 2,95 \quad 3,00 \quad 3,05 \end{array} \rightarrow \text{N/m} \quad (\text{I})$$

la valeur obtenue est $k = (2,952 \pm 0,001) \text{ N/m}$

$$k - \Delta k = 2,952 - 0,001 = 2,951$$

$$k + \Delta k = 2,952 + 0,001 = 2,953$$

$\Rightarrow$ Ces deux valeurs sont acceptables car elles $\in$ l'intervalle (I).

$$d = f(m)$$

$$\begin{matrix} 0,01 \text{ m} \\ \uparrow \\ 0,004 \text{ kg} \end{matrix}$$

$$\frac{\Delta d}{d_{ech}} = \frac{1,5 \times 10^{-4}}{0,01} = 0,015 \text{ cm} \approx 0,02 \text{ cm}$$

négligeable

$$d = 33,2 \text{ m}$$