

Chapitre 1 : Les Nombres réels

Chapitre 1

Les Nombres réels

1.1 Notations

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: ensemble des entiers naturels.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

b) $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: ensemble des entiers relatifs.

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}.$$

c) $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$: ensemble des nombres décimaux.

Remarque

Un nombre décimal est un nombre réel dont la partie décimale est finie.

d) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$: ensemble des nombres rationnels.

Remarque

Tout nombre réel admet une écriture décimale sous la forme :

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{partie réelle}}, \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{partie décimale}}$$

Proposition

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une partie décimale finie ou infinie périodique à partir d'un certain rang.

Remarque

Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et $p \wedge q = 1$ (c'est-à-dire $\text{pgcd}(p, q) = 1$: p et q sont premiers entre eux). On dit alors que $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Exemple

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{1}{3} = 0,333\dots \in \mathbb{Q}, \quad 1,25 \in \mathbb{Q}, \quad 13,2\overline{75} \in \mathbb{Q}$$

$$e \simeq 2,718\dots \notin \mathbb{Q}, \quad \pi \simeq 3,14159265\dots \notin \mathbb{Q}$$

1.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ **1.2.1 Nombres irrationnels**

Il existe des nombres qui n'appartiennent ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{Z}$, ni à $\mathbb{Q}$.

Proposition

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est irrationnel).

Pour démontrer cette proposition, on rappelle quelques notions importantes.

Définition (Démonstration par l'absurde)

On suppose le contraire de ce qu'on veut démontrer, puis on montre que cela mène à une contradiction. La proposition initiale est donc vraie.

Théorème d'Euclide

Si un nombre premier P divise le produit d'entiers $(a.b)$, alors $(P \text{ divise } a)$ ou $(P \text{ divise } b)$:

$$\begin{cases} P \mid a.b \\ P \text{ premier} \end{cases} \implies (P \mid a) \text{ ou } (P \mid b).$$

Théorème de Gauss

$$\begin{cases} P \mid a.b \\ P \wedge b = 1 \end{cases} \implies P \mid a.$$

Remarque

$P \mid a$ signifie que a est multiple de P , c'est-à-dire $a = k \cdot P$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Si $P = 2$ (2 est premier) et $a.b$ est multiple de 2 ($2 \mid a.b$), alors nécessairement a est multiple de 2, ou b est multiple de 2 (théorème d'Euclide).

Avec le théorème de Gauss : si $P = 7$, $b = 15$ et $a.b$ est multiple de 7, alors $a.b = 7k$. Comme $b = 15$ et $7 \wedge 15 = 1$, a doit être multiple de 7.

Remarque

Pour un bon raisonnement par l'absurde, il faut suivre les 5 étapes :

1. Définir clairement la proposition que l'on veut démontrer.
2. Supposer « temporairement » le contraire de cette proposition.

3. Analyser les conséquences logiques de cette hypothèse par une démonstration mathématique.
4. Identifier une contradiction ou une situation absurde.
5. Conclure que l'hypothèse est fausse, donc la proposition initiale est vraie.

Preuve de la proposition 2

Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et $p \wedge q = 1$ (p et q sont premiers entre eux).

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies p = \sqrt{2}q \implies p^2 = 2q^2 \implies p \cdot p = 2 \cdot q \cdot q. \quad (*)$$

Or 2 est premier et 2 divise $p \cdot p$, donc (d'après le théorème d'Euclide) 2 divise p .

2 divise p signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.

En remplaçant dans (*) :

$$2k \cdot 2k = 2 \cdot q \cdot q \implies 4k^2 = 2q^2 \implies 2k^2 = q^2 = q \cdot q.$$

Donc 2 divise $q \cdot q$, et comme 2 est premier, 2 divise q .

On a donc 2 divise p et 2 divise q , c'est-à-dire que p et q ne sont pas premiers entre eux.

Ceci contredit $p \wedge q = 1$.

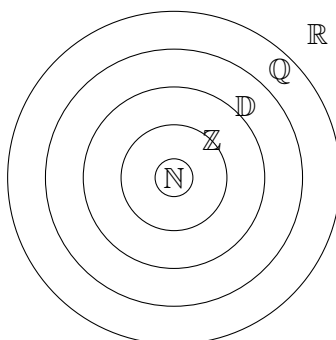
Conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est irrationnel).

Remarque

De même, on montre que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} + 2\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$. De façon générale, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ dès que $n \geq 2$ est un nombre premier.

- a) La même preuve est valable pour démontrer que la racine carrée d'un nombre premier est irrationnelle.
- b) $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationnels}\}$: ensemble des nombres réels. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Quelques Symboles Mathématiques

- $\forall$ signifie « pour tout $x \in E$ », « quel que soit $x \in E$ ».
- $\exists$ signifie « il existe au moins un élément ».
- $\exists!$ signifie « il existe un unique élément ».

- $\Rightarrow$ signifie « implique », c'est l'implication, si...alors.
- $\Leftrightarrow$ signifie « si et seulement si », c'est l'équivalence, si et seulement si (ssi).
- $\wedge$ signifie « et », c'est la conjonction.
- $\vee$ signifie « ou », c'est la disjonction.

Théorème (Densité des rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$)

— $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des rationnels) est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'entre deux réels il existe un rationnel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Q}, \quad x < q < y.$$

— $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (l'ensemble des irrationnels) est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x < p < y.$$

Notations

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$	$x \in \mathbb{R}^+$ est dit x positif.
$\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$	$x \in \mathbb{R}^{+*}$ est dit x strictement positif.
$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\},$	$x \in \mathbb{R}^-$ est dit x négatif.
$\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\},$	$x \in \mathbb{R}^{-*}$ est dit x strictement négatif.

1.2.2 L'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition

$\mathbb{R}$ est ordonné par la relation $\leq$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \leq y) \iff (x - y \in \mathbb{R}^-) \iff x - y \leq 0.$$

Propriétés

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x.$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \iff x + z \leq y + z.$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}^+, \quad x \leq y \iff xz \leq yz.$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}^-, \quad x \leq y \iff xz \geq yz.$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}^* / x, y > 0, \quad x \leq y \iff \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}.$
6. $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x \leq y \\ a \leq b \end{cases} \implies x + a \leq y + b.$

Attention aux erreurs suivantes

1) $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \not\Rightarrow x - x' \leq y - y'.$

Exemple : $-3 \leq 1$ et $-3 \leq 6$, mais $(-3) - (-3) = 0 \not\leq 1 - 6 = -4.$

2) $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases}, \quad x', y' \in \mathbb{R}^* \not\Rightarrow \frac{x}{x'} \leq \frac{y}{y'},$ car comparer une fraction demande de prendre en compte le signe et la grandeur du dénominateur.

Exemple : $9 \leq 10$ et $1 \leq 2$, mais $\frac{9}{1} \not\leq \frac{10}{2}$ (c'est-à-dire $9 \not\leq 5$).

3) $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \implies x \cdot x' \leq y \cdot y'$ est vraie **seulement si** x, y, x', y' sont positifs. Sinon, c'est faux.

Exemple : $-2 \leq 1$ et $-4 \leq -3$, mais $(-2)(-4) = 8 \not\leq (1)(-3) = -3$.

4) $x \leq y \not\implies \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ s'il n'est pas vrai que $x \cdot y > 0$.

Exemple : $-1 \leq 2$, mais $-\frac{1}{1} \not\geq \frac{1}{2}$.

On suppose $x \leq y$ et $x' \leq y'$		Vrai/Faux	Exemple
1)	$x - x' \leq y - y'$	Faux	$-3 \leq 1, -3 \leq 6$ mais $(-3) - (-3) = 0 \not\leq -4$
2)	$\frac{x}{x'} \leq \frac{y}{y'}, (x', y') \neq (0, 0)$	Faux	$9 \leq 10, 1 \leq 2$ mais $\frac{9}{1} \not\leq \frac{10}{2}$
3)	$x \cdot x' \leq y \cdot y'$	Vrai ssi $x, x', y, y' \geq 0$	$-2 \leq 1, -4 \leq -3$ mais $(-2)(-4) \not\leq -3$
4)	$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}, (x, y) \neq (0, 0)$	Vrai si $xy > 0$, faux sinon	$-10 \leq 2$ mais $-\frac{1}{10} \not\geq \frac{1}{2}$

1.2.3 Intervalles

Définition

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle intervalle $I = [x, y]$ l'ensemble de tous les nombres délimités par x et y .

Autrement dit, I est un intervalle si

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

On note $I \subset \mathbb{R}$.

Remarque

1. Un intervalle borné est un intervalle dont les bornes (extrémités) sont finies.
2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
3. $\emptyset = \{\}$: ensemble vide.

Définition (Droite réelle achevée)

La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ constituée de $\mathbb{R}$ auquel on ajoute deux éléments formels $+\infty$ et $-\infty$:

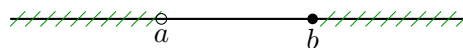
$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ permet d'éviter de séparer le cas « un réel » et « l'infini » dans les énoncés. Par exemple, les intervalles ouverts sont ceux de la forme $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

L'intervalle est	Borné	Non borné
Ouvert (open)	$]a, b[$	$]a, +\infty[,] - \infty, a[, \mathbb{R}$
Fermé (close)	$\{a\} = [a, a], [a, b]$	$[a, +\infty[,] - \infty, a], \mathbb{R}$
Semi-ouvert (ou semi-fermé) half-open/closed interval	$]a, b], [a, b[$	—

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$\phi = \{\}$: ensemble vide.



Attention

- L'intersection $\cap$ d'intervalles est un intervalle.
- L'union $\cup$ d'intervalles n'est pas forcément un intervalle.

Exemple : $I =]1, 3] \cup [5, 7[$. On a $1 < z = 4 < 7$ mais $4 \notin I$, donc I n'est pas un intervalle.

Exemple

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x < \sqrt{5}\}$. A est-il un intervalle ? Justifier votre réponse.

On a $1 \in A$, $\frac{2}{3} \in A$, mais $1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{5}$ et $\sqrt{2} \notin A$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Donc A n'est pas un intervalle.

Définition (Voisinage)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$. Un voisinage V d'un point a est un ensemble qui contient un ouvert qui comprend le point a .

V est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset V$.

Exemple

$]3 ; 3, 2[$ est un voisinage de π . $] - \varepsilon, \varepsilon[$ est un voisinage de 0.

1.3 Valeur absolue

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0; \quad |x| \geq 0; \quad |-x| = |x|; \quad -|x| \leq x \leq |x|.$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|.$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \geq ||x| - |y||$ (seconde inégalité triangulaire)

6. $\forall x \in \mathbb{R}, |x - y| \geq ||x| - |y||$.
 — $\forall a \in \mathbb{R}^+, |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff \mathcal{S} = [-a, a]$.
 — $\forall a \in \mathbb{R}^-, |x| \leq a$ est impossible $\Rightarrow \mathcal{S} = \emptyset$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$,
 — $\forall a \in \mathbb{R}^+, |x| \geq a \Rightarrow (x \geq a \text{ ou } x \leq -a) \Rightarrow \mathcal{S} =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.
 — $\forall a \in \mathbb{R}^-, |x| \geq a$ toujours vérifiée $\Rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Preuve**Preuve de négativité triangulaire, (propriété 4) :**

On rappelle que $|y - x|$ représente la distance entre x et y .

Montrons que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

On a $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$, donc en additionnant :

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, d'après la propriété (6), $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Preuve de la seconde inégalité triangulaire (propriété 5) :

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x + y|,$$

$$|y| = |y + x - x| \leq |x + y| + |x| \implies |y| - |x| \leq |x + y| \implies |x| - |y| \geq -|x + y|.$$

Donc $-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|$, c'est-à-dire $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

En remplaçant y par $-y$ dans cette dernière inégalité, et comme $|-y| = |y|$, on obtient

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Exemple

$$|-7| = 7, \quad |2| = 2.$$

Résolution d'équations et d'inéquations avec valeur absolue**Exemple**

1) Résoudre $\sqrt{(x+1)^2} = 2$, c'est-à-dire $|x+1| = 2$.

Tableau de signes de $x+1$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$	

Résolution :

— Pour $x \in]-\infty, -1]$:

$$-x - 1 = 2 \implies x = -3.$$

$$x = -3 \in]-\infty, -1] : \text{accepté} \implies S_1 = \{-3\}.$$

— Pour $x \in [-1, +\infty[$:

$$x + 1 = 2 \implies x = 1.$$

$$x = 1 \in [-1, +\infty[: \text{accepté} \implies S_2 = \{1\}.$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est

$$S = \{-3, 1\} = S_1 \cup S_2.$$

2) $|3x - 1| = -1$: impossible (une valeur absolue est positive), donc $S = \emptyset$.

3) $|x - 1| \leq -3$: impossible, donc $S = \emptyset$.

4) **Résoudre** $1 < |x - 2| < 3$. $\iff 1 < \sqrt{(x - 2)^2} < 3$.

Tableau de signes de $x - 2$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$		$-$	0 $+$
$ x - 2 $		$-x + 2$	$x - 2$

Résolution :

— Pour $x \in]-\infty, 2]$:

$$1 < -x + 2 < 3 \implies -1 < -x < 1 \implies -1 < x < 1.$$

D'où $S_1 =]-\infty, 2] \cap]-1, 1[=]-1, 1[$.

— Pour $x \in [2, +\infty[$:

$$1 < x - 2 < 3 \implies 3 < x < 5.$$

D'où $S_2 = [2, +\infty[\cap]3, 5[=]3, 5[$.

Conclusion.

$$S = S_1 \cup S_2 =]-1, 1[\cup]3, 5[.$$

1.4 Partie entière

Théorème (Axiome d'Archimède)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x < n.$$

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x **l'unique entier** $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p \leq x < p + 1,$$

notée $[x]$, $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ (c'est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x).

Exemple

$$E(4,3) = 4, \quad E(0,91) = 0, \quad E(-7,2) = -8, \quad E(-1) = -1.$$

Propriétés

1. $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x.$
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, E(n) = n.$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ avec } x < y, E(x) \leq E(y).$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$

Remarque

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $E(x) < x < E(x) + 1$ (inégalité stricte des deux côtés).

Preuve des propriétés 5-6 et 7)

5) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n.$

Par définition de la partie entière, on a

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

En ajoutant n aux trois membres :

$$\underbrace{E(x) + n}_k \leq x + n < \underbrace{E(x) + n + 1}_k \implies k \leq x + n < k + 1.$$

Comme $E(x) + n \in \mathbb{Z}$ (car $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$), cet encadrement est exactement la caractérisation de la partie entière de $x + n$:

$$E(x + n) = E(x) + n.$$

6) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$

On a, $n > 0$:

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \implies nE(x) \leq nx < nE(x) + n.$$

Comme la fonction $E(\cdot)$ est une fonction croissante, alors

$$E\left(\underbrace{nE(x)}_{\in \mathbb{Z}}\right) \leq E(nx) < E\left(\underbrace{nE(x) + n}_{\in \mathbb{Z}}\right)$$

$$nE(x) \leq E(nx) < nE(x) + n$$

En divisant par $n > 0$:

$$E(x) \leq \frac{1}{n}E(nx) < E(x) + 1.$$

Conclusion.

$$E\left(\frac{1}{n}E(nx)\right) = E(x).$$

7) Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$

On a $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $E(y) \leq y < E(y) + 1$. En additionnant :

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2.$$

Comme la fonction $E(\cdot)$ est croissante, et $E(x) + E(y) \in \mathbb{Z}$, $E(x) + E(y) + 2 \in \mathbb{Z}$,

$$E(E(x) + E(y)) \leq E(x + y) < E(E(x) + E(y) + 2),$$

c'est-à-dire

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) < E(x) + E(y) + 2,$$

soit, puisque $E(x + y)$ est un entier,

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

Remarque

1. Si $2 \leq x < 3$ alors $E(x) = 2$.
2. Si $E(x) = 4$ alors $4 \leq x < 5$.
3. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $E(x) \neq x$; si $y \in \mathbb{Z}$, alors $E(y) = y$.

Exemple

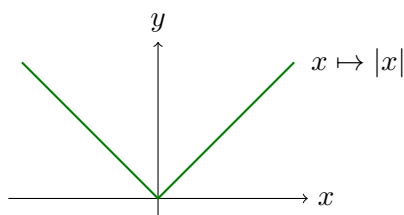
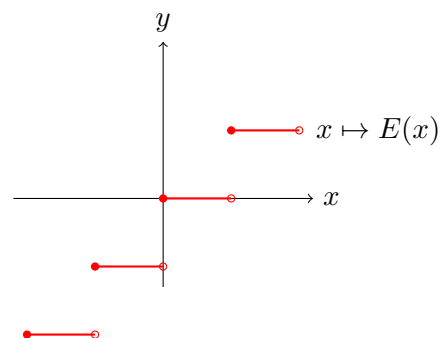
1) Résoudre $E(x + 1) = 5$ dans $\mathbb{R}$.

Comme $5 \in \mathbb{Z}$, l'équation possède une solution. $E(x + 1) = 5 \iff 5 \leq x + 1 < 6 \iff 4 \leq x < 5$. D'où $\mathcal{S} = [4, 5[$.

2) Résoudre $3E(x - 4) = 1$.

$3E(x - 4) = 1 \iff E(x - 4) = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, donc l'équation ne possède pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

Représentations graphiques



1.5 Majorant, minorant, minimum, maximum, borne supérieure et borne inférieure

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, m et M des éléments de $\mathbb{R}$.

- A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, x \leq M$. M est appelé un **majorant** de A .
- A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, x \geq m$. m est appelé un **minorant** de A .
- A est **bornée** s'il existe m, M tels que $\forall x \in A, m \leq x \leq M$ (c'est-à-dire majorée et minorée).

Définition

- M est le **plus grand élément** (**maximum**) de A si

$$M = \max(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ M \in A \end{cases}$$

- m est le **plus petit élément** (**minimum**) de A si

$$m = \min(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m \\ m \in A \end{cases}$$

Remarque

1. Le majorant et le minorant, s'ils existent, ne sont pas uniques.
2. $\max A$ et $\min A$, s'ils existent, sont uniques.
3. Les intervalles ouverts $]a, b[$ ne possèdent ni maximum ni minimum.

Définition (Borne supérieure et borne inférieure)

- M est appelée **borne supérieure** de E (notée $M = \sup E$) si M est le plus petit des majorants de E .
- m est appelée **borne inférieure** de E (notée $m = \inf E$) si m est le plus grand des minorants de E .

Théorème

1. Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
2. Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Remarque (Important)

D'après ce théorème, avant de chercher le sup ou l'inf d'un ensemble, il faut d'abord prouver que l'ensemble est non vide et borné (majoré pour l'existence du sup, minoré pour l'existence de l'inf).

Ensemble A	Borné/ non	Majorants	Minorants	$\sup A$	$\max A$	$\inf A, \min A$
$[1, 2]$	borné	$[2, +\infty[$	$] - \infty, 1]$	$2 \in A$	2	$\inf A = 1 \in A,$ $\min A = 1$
$]4, 5[$	borné	$[5, +\infty[$	$] - \infty, 4]$	$5 \notin A$	n'existe pas	$\inf A = 4 \notin A,$ $\min A$ n'existe pas
$\{-1, -5, 9\}$	borné	$[9, +\infty[$	$] - \infty, -5]$	$9 \in A$	9	$\inf A = -5 \in A,$ $\min A = -5$
$] - \infty, 7]$	majoré .	$[7, +\infty[$	n'existent pas	$7 \in A$	7	n'existent pas
$\mathbb{N}$	minoré seulement.	n'existent pas	$] - \infty, 0]$	n'existe pas	n'existe pas	$\inf A = 0 \in \mathbb{N},$ $\min A = 0$

1.6 Caractérisation de la borne supérieure et inférieure

Proposition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$:

1. Si A est majoré, alors

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, x \leq M & (M \text{ est un majorant de } A) \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M \end{cases}$$

Cela signifie que tout nombre plus petit que M n'est pas un majorant : on peut trouver un $x_\varepsilon \in A$ qui le dépasse.

2. Si A est minoré, alors

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, x \geq m \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon \end{cases}$$

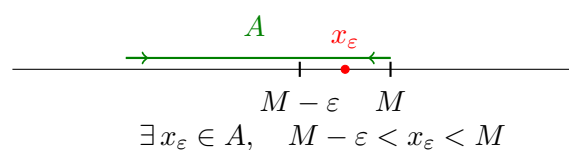
Cela signifie que tout nombre plus grand que m n'est pas un minorant de A : on peut trouver un $x \in A$ qui lui est inférieur.

Remarque

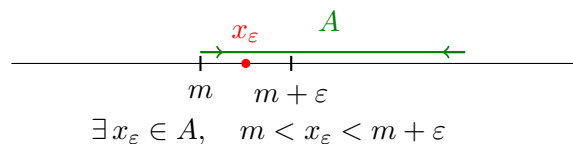
On utilise $\varepsilon > 0$ (epsilon) pour représenter une petite quantité positive arbitraire : ε est *arbitrairement petit mais positif*.

Explication (droite réelle) :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, x \leq M \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, M - \varepsilon < x_\varepsilon < M \end{cases}$$



$$m = \inf A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, x \geq m \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon \end{cases}$$



1) Soit $A =]0, 4]$.

Déterminons la borne supérieure et la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément (s'ils existent).

A une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($1 \in A$). De plus $\forall x \in A, 0 < x \leq 4$, donc A est borné. Ainsi la borne supérieure et inférieure existent.

Borne supérieure

4 est un majorant, donc $\sup A \leq 4$. D'autre part, $4 \in A$, donc $4 \leq \sup A$. Ceci veut dire que $\sup A = 4 = \max A$.

Borne inférieure

En utilisant la caractérisation de la borne inférieure, montrons que $\inf A = 0$.

On doit montrer que

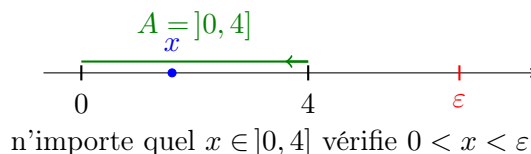
- ① $\forall x \in]0, 4], x \geq 0$ et
- ② $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]0, 4] / 0 < x < 0 + \varepsilon$.

La première est évidente. Pour la deuxième, soit $\varepsilon > 0$; on distingue deux cas.

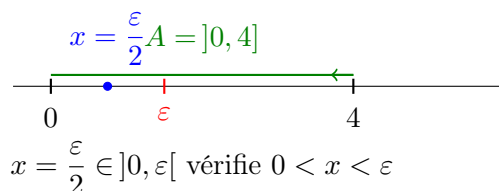
— **Cas 1 :** $\varepsilon \geq 4$: tous les $x \in]0, 4]$ vérifient la deuxième propriété.

En particulier, on peut choisir $x = 3 \in]0, 4]$:

$$\forall \varepsilon \geq 4, \exists x = 3 \in]0, 4] / 0 < x < 0 + \varepsilon.$$



— **Cas 2 :** $0 < \varepsilon < 4$: tous les $x \in]0, \varepsilon[$ vérifient la deuxième propriété. En particulier, $x = \frac{\varepsilon}{2} \in]0, \varepsilon[$ vérifie $0 < x < 0 + \varepsilon$.



Donc $\inf A = 0$.

Puisque $0 \notin]0, 4]$, A n'admet pas de minimum.

Proposition : Propriétés de la borne supérieure et la borne inférieure

Soient A et B deux parties non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si $A \subset B$ et B est bornée alors A est bornée et on a

$$(\sup A \leq \sup B) \quad \text{et} \quad (\inf A \geq \inf B).$$

2. Si A et B sont bornées alors

(a) $A \cup B$ et $A \cap B$ sont bornés.

$$(b) \quad \sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \qquad \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$$

$$(c) \quad \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B) \qquad \inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$$

(La preuve de cette proposition est laissée comme exercice pour les étudiants)