



Exercice 1.

On considère $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- 1) Montrer par l'absurde que $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- 2) De la même manière, montrer que si $r \neq 0$ alors $rx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- 3) Soient r_1 et r_2 deux rationnels tels que $r_1 < r_2$.

- a) En déduire que $x = r_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(r_2 - r_1)$ est irrationnel.
- b) En déduire que $x \in]r_1, r_2[$.

Exercice 2.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.
 Montrer que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3.

- 1) Montrer que si p est premier alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
- 2) Montrer que $\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes, puis donner chaque ensemble solution sous la forme la plus appropriée : intervalle, réunion d'intervalles ou ensemble fini de points.

- 1) $\frac{2x+1}{x-3} < 2$.
- 2) $\frac{2}{|x-1|} \leq 1$.
- 3) $|x^2 - 3| = 2x$.
- 4) $|2 - 3x| + |5 - x| \geq 1$.

Exercice 5.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer :

- 1) $||x| - |y|| \leq |x + y|$.
- 2) En déduire que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exercice 6.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $E(\sqrt{x^2 + 1}) = 2$.
- b) $5E(x^3 - 8) = 2$.
- c) $E(3x) < 4$.
- d) $1 < E(2x) + 2 < 5$.
- e) $E(|x + 3|) \leq 0$.
- f) $E(x^2 - x + 2) - x = 1$.

Exercice 7.

Pour chacun des ensembles suivants :

$$A =]1, 4], \quad B = \left\{ \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} : x \in \mathbb{R} \right\}, \quad C = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Déterminer l'ensemble des majorants et celui des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément (s'ils existent).

Exercice 8. (Facultatif)

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel

- 1) Montrer que $a = 6 + 4\sqrt{2}$ et $b = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
- 2) Calculer $\sqrt{ab}$.
- 3) Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est rationnel.

Exercice 9. (Facultatif)

Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$, si $\sqrt{p} + \sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{p} - \sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10.

Soient x et y dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, tels que $(x + y) \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $E(x) + E(y) = x + y - 1$.

Exercice 11. (Facultatif)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2 \leq |x + 1| < 3, \quad |4x - 1| = |2x + 3|, \quad ||x - 1| - 2|x|| \leq 3.$$

Exercice 12. (Facultatif)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$E(x+5) = 2E(x-1), \quad 5E(x^3-8) = 2, \quad E(x^2-x+2)-x = 1, \quad E(3x) < 5, \quad E(x)+|x-1| = x.$$

Exercice 13. (Facultatif)

- 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $E(2x)$ en fonction de $E(x)$.
- 2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $E(x + k) = E(x) + k$.
- 3) Résoudre l'équation $E(2x + 1) = E(x + 4)$.

Exercice 14. (Facultatif)

- 1) Montrer que $E(2\sqrt{n(n+1)}) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Calculer $E[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2]$.

Exercice 15. (Facultatif)

Déterminer (s'ils existent) les majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure, plus grand élément et plus petit élément des ensembles :

- a) $A = \{\frac{x+1}{x+2}, x \in \mathbb{R}, x \leq -3\}$.
- b) $B = \{\frac{2n+(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
- c) $C = \{x \in \mathbb{R}, \frac{(E(x))^2}{E(x)+2} \geq 1, E(x) < 4\}$.