Université de Tlemcen Jeudi01Octobre 2020

Faculté des Sciences **Module :** Math 2- Tronc commun Sciences et Technologies

Département des Mathématiques **Durée :** 1 h-30mns

Examen final

« L'usage de la calculatrice est strictement interdit »

La note du contrôle continue=2.(note de l'exo1+note de l'exo2)

Exercice 01 : (05 pts) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - x^2 y = \sqrt{x+1}\, e^{\frac{x^3}{3}}$$

Exercice 02 : (05 pts)

1. Décomposer, en une somme d'éléments simples, la fraction rationnelle suivante:

$$R(x) = \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)}$$

2. Calculer l'intégrale :

$$I = \int R(x)dx = \int \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx$$

Exercice 03 : (05 pts)

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$
   En déduire les $DL_3(0)$ des fonctions $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. En utilisant les résultats précédents, trouver les $DL_4(0)$ des fonctions :
$$F(x) = \ln(1+x) \; et \; G(x) = Arctg(x)$$
3. En déduire la valeur de la limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^2}{2} + \ln(1+x) - Arctg(x)\right)$$

Exercice 04 : (05 pts)

On considère l'équation différentielle : $y'' + y' - 6y = e^{5x} + (6x^2 + 4x - 3)$ $\quad (\boldsymbol{E})$

1. Résoudre l'équation sans second membre associée à (E) :
$$y'' + y' - 6y = 0 \quad (\boldsymbol{E_0})$$
2. Déterminer une solution particulièrey_1 de l'équation :
$$y'' + y' - 6y = e^{5x}$$
3. Trouver une solution particulière y_2 de l'équation :
$$y'' + y' - 6y = 6x^2 + 4x - 3$$
4. En déduire la solution générale de l'équation (E).

Bon courage

Corrigé

Exercice 01 : (05 pts) L'équation

$$y' - x^2 y = \sqrt{x+1}e^{\frac{x^3}{3}} (\boldsymbol{E})$$

est une équation différentielle du premier ordre linéaire.

- Résolution de l'équation sans second membre :

$$y' - x^2 y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 y \ \ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = x^2 dx\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

Donc

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \ \ ou\ encore\ ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + c, c\ constante\ réelle\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

Ce qui donne :

$$y = \pm e^{\frac{1}{3}x^3 + c} = \pm e^c e^{\frac{1}{3}x^3} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

$$D'\text{où}: y_0 = ke^{\frac{x^3}{3}}\ avec\ \ k\ \ constante\ réelle(k = \pm e^c)\ (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

- Recherche d'une solution particulière en utilisant la variation de la constante :

On cherche une solution particulière$y_1 = k(x)e^{\frac{x^3}{3}} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$ (k(x) est une fonction)

$$y'_1 = k'(x)e^{\frac{x^3}{3}} + x^2 k(x) e^{\frac{x^3}{3}} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

D'où

$$(\boldsymbol{E}) \Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{x^3}{3}} + x^2 k(x)e^{\frac{x^3}{3}} - x^2 k(x)e^{\frac{x^3}{3}} = \sqrt{x+1}e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\Longrightarrow k'(x) = \sqrt{x+1} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

$$\Longrightarrow k(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\ et\ y_1 = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{x^3}{3}} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

$$y(x) = ke^{\frac{x^3}{3}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{x^3}{3}} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

Exercice 02 : (05 pts)

1. La décomposition en éléments simple :

$$\frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2} (\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

On a :

$$b = \lim_{x \to -1} (x+1)^2 \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{(1+x)^2(x^2+2)} = -1$$

En plus :

$$\lim_{x \to +\infty} xR(x) = 2 \Leftrightarrow a + c = 2$$

$$pour\ x = 0 \quad on\ obtient: \quad a + b + \frac{d}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$et\ pour\ x = 1, \quad on\ a \qquad \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c+d}{3} = \frac{3}{12}$$

D'où :

$$a = 1, b = -1, c = 1\ et\ d = -1\ (\mathbf{0.5}\boldsymbol{pt}) \times \mathbf{4}$$

Autrement dit :

$$\frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+2}$$

2. Calcul de l'intégrale :

$$I = \int \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{(-1)}{(x+1)^2} dx + \int \frac{x}{x^2+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2} dx$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) + c_1 (\mathbf{0.25}\ \boldsymbol{pt})$$

$$\int \frac{(-1)}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{x+1} + c_2\ (\mathbf{0.75}\ \boldsymbol{pt})$$

$$\int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + c_3 (\mathbf{0.75}\ \boldsymbol{pt})$$

$$\int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \left\langle \begin{matrix} u = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{2}} dx \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg(u) + c_3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_3\ (\mathbf{0.75}\ \boldsymbol{pt})$$

$$D'\text{où}: I = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Exercice 03 : (05 pts)

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$**(0.5 pt)**

   En utilisant la propriété de composition de la fonction $\left(x \longmapsto \frac{1}{1-x}\right)\ avec\ (x \mapsto (-x))$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)(\mathbf{0.5}\ \boldsymbol{pt})$$

   En utilisant la propriété de composition de la fonction $\left(x \longmapsto \frac{1}{1+x}\right)\ avec\ (x \mapsto x^2)$, on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3)(\mathbf{01\ pt})$$

2. Par intégration, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$Arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)(\mathbf{01\ pt})$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^2}{2} + \ln(1+x) - Arctg(x)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - (x - \frac{x^3}{3})\right)(\mathbf{0.75\ pt})$$

$$= +\frac{2}{3}(\mathbf{0.75\ pt})$$

Exercice 04 : (05 pts)

1. Soit l'ESSM :

$$y'' + y' - 6y = 0 \quad (\boldsymbol{E_0})$$

L'équation caractéristique associée : $r^2 + r - 6 = 0\ (\mathbf{0.5\ pt})$, admet deux solutions réelles :$r_1 = -3\ et\ r_2 = 2(\mathbf{0.5\ pt})$

Donc la solution de $(\boldsymbol{E_0})$est : $y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}, tel\ que\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\ \ (\mathbf{0.75\ pt})$.

2. Puisque 5 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + y' - 6y = e^{5x}(\boldsymbol{E1})$$

est de la forme$y_{p1}(x) = \alpha e^{5x}(\mathbf{0.5\ pt})$.

Donc

$$y_{p1}(x) = \alpha e^{5x}$$
$$y_{p1}^{'(x)} = 5\alpha e^{5x}$$
$$y_{p2}^{''(x)} = 25\alpha e^{5x}$$

En remplaçant dans l'équation **(E1)** , on obtient :

$$25\alpha e^{5x} + 5\alpha e^{5x} - 6\alpha e^{5x} = e^{5x}$$

Par identification, on obtient

$$\alpha = \frac{1}{24}(\mathbf{0.5\ pt})\ et\ y_{p1}(x) = \frac{1}{24}e^{5x}(\mathbf{0.25\ pt})$$

3. La solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' + y' - 6y = 6x^2 + 4x - 3 \quad (\boldsymbol{E2})$$

Est de la forme $y_{p2} = ax^2 + bx + c\ (\mathbf{0.5\ pt})$

D'où : $y'_{p2} = 2ax + b\ \ et\ y''_{p2} = 2a$

En remplaçant dans **(E2)**, on trouve

$$-6ax^2 + (2a - 6b)x + 2a + b - 6c = 6x^2 + 4x - 3$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a - 6b = 4 \\ 2a + b - 6c = -3 \end{cases}$$

Ou encore

$$a = -1, b = -1 \; et \; c = 0 \; (\mathbf{0.25 \; pt} \times \mathbf{3})$$

Donc : $y_{p2} = -x^2 - x \; (\mathbf{0.25 \; pt})$

4. La solution générale de l'équation (E)est :

$$y(x) = y_0(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{24} e^{5x} - x^2 - x, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; (\mathbf{0.5 \; pt})$$